Curso de Física Matemática

Rubens Amaral-Instituto de Física-UFF

Objetivos:

1) Servir de introdução ao modo matemático de pensar, incluindo noções básicas de lógica.
2) Mostrar a necessidade de provas rigorosas e ensinar a redigir demonstrações.
3) Abordar tópicos fundamentais de Análise Matemática que não costumam ser vistos nos cursos de Cálculo.
4) Discutir tópicos de Análise Funcional importantes para a Física, com diversas aplicações à Mecânica Quântica.
5) Incentivar a curiosidade e exploração de tópicos de física matemática através de iniciativas individuais e coletivas.

SUMÁRIO

Avaliações e Bibliografia

Sistema 3X1/3:

1/3—- Listas de exercícios (cobradas inteiramente ou em mini-testes)
1/3—- Provas (2 provas)
1/3—- Seminários em duplas sobre temas suplementares.

Livro texto básico:
1)Convite à física matemática- Nivaldo Lemos. Leitura prévia requerida às aulas.

Referências importantes:
2) Mathematical Physics - Robert Geroch
3) A Course in Modern Mathematical Physics - Peter Szekeres

Clássicos vitalícios
Principles of Mathematical Analysis - W Rudin
Naive Set Theory - P Halmos

Capítulo 2

Conjuntos

Atenção à construção da notação!

2.1 Noções básicas

Noções primitivas: Fica decretado que há conjuntos e há elementos. Elementos podem ter **relação de pertencimento** a um conjunto: $x \in A$ (x(elemento) pertence a A(conjunto)). Caso contrário $x \notin A$(x não pertence a A).

Axioma da extensão: $A = B \leftrightarrow (((\forall x)(x \in A) \to x \in B) \wedge ((\forall x)(x \in B) \to x \in A))$.
Observe o símbolo lógico $\wedge$, significando o conectivo "e", de requerimento conjunto das especificações que ele conecta. Em contraste $\vee$, "ou", requer a validade de um, outro ou os dois requerimentos conectados.
Demonstração da igualdade de conjuntos requer mostrar os dois requerimentos acima.
Contra-exemplo: Vamos associar o conjunto dos ascendentes de uma pessoa(pais, avós, bisavós, etc) a cada pessoa. Dada uma pessoa, está associado um conjunto. Porém, não vale o axioma da extensão: João e Maria, irmãos, tem os mesmos ascendentes, mas são distintos.
obs: $\emptyset = \{x, x \notin \emptyset\}$ Não há $x \in \emptyset$.

Relação de continência: $A \subset B \leftrightarrow ((\forall x)(x \in A) \to x \in B)$ (A está contido em, é subconjunto de, B). Não contido: $A \not\subset B$.
É transitiva, $A \subset B \wedge B \subset C \to A \subset C$, reflexiva $A \subset A$ e antissimétrica, $A \subset B \wedge B \subset A \to A = B$.
Questão: a relação de pertencimento é reflexiva? Pode ser reflexiva em um caso particular?
Axioma da especificação: qualquer requerimento(especificação) sobre elementos de um conjunto define um subconjunto). Notação para o requerimento R sobre os elementos x de A (por exemplo $R(x)$ significa x é amarelo.) definindo o subconjunto A_R, $A_R = \{x \in A | R(x)\}$
Obs:$A \ll B \leftrightarrow ((\forall x)(x \in A) \to x \in B) \wedge (A \neq B)$ (A está contido estritamente em, é subconjunto próprio de, B)

Axioma das partes Conjunto potência, ou das partes (Power set) $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subset A\}$. Às vezes se usa $\mathcal{P}_A$ ou 2^A. Ou $B \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow B \subset A$. Obs: $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$. Obs: Conjunto de conjuntos!

Axioma da união $\exists A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

Interseção $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$. (Garantido pelo axioma da especificação.)
Disjuntos e subconjuntos $A \cap B = \emptyset$, A e B disjuntos; $A \cap B = B \leftrightarrow A \subset B$

Axioma do pareamento, ou da formação de pares não ordenados: Dados conjuntos A e B, $\exists \{A, B\}$. Obs: $\{A, A\} = \{A\}$. $\{A\} \neq A$. (singleton, singelão(?))

Teorema 2.4 A, B, C, X e Y são conjuntos
i) $(A \cap B \subset A)$, analogamente $(A \cap B \subset B)$. $X \subset A \wedge X \subset B \rightarrow X \subset A \cap B$
ii) $A \subset A \cup B$, analogamente $B \subset A \cup B$. $(A \subset Y) \wedge (B \subset Y) \rightarrow (A \cup B) \subset Y$
iii) e iv)$\cup$ e $\cap$ são comutativas $(A \cap B = B \cap A)$ e associativas$(A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C)$.
v) $\cap$ é distributiva em relação a $\cup$ e vice-versa
vi) $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$
vii) $\cup$ e $\cap$ são reflexivas
viii) $A \cup (A \cap B) = A$ e $A \cap (A \cup B) = B$
ix)$A \subset B \rightarrow A \cup C \subset B \cup C$, analogamente $A \subset B \rightarrow A \cap C \subset B \cap C$
x) $A \cup B = A \leftrightarrow B \subset A$

Diferença de conjuntos $A \backslash B = \{x | x \in A \ e \ x \notin B\}$

Diferença simétrica: $A \Delta B = A \backslash B \cup B \backslash A$.Obs: $A \Delta B = B \Delta A$.

Exemplo: considere E, o conjunto de todas os campos elétricos soluções da eletrostática para a região do espaço $b = \{\vec{r} | r < 2\}$, e considere B o conjunto análogo de soluções da magnetostática. $A \Delta B$, corresponde ao conjunto de todas as soluções de campos elétricos ou magnéticos que não sejam no vácuo! Tem de ter fonte em b, para que o campo esteja no conjunto.

Complemento: Para $B \subset A$, define-se $A \backslash B \equiv C_A B$ (complemento de B em relação a A). Quando o "conjunto universo U"é claro $C_U B = B^c = B'$. Obs: Não se aceita hoje em dia um conjunto universo "universal".

Exemplo. Seja E como no exemplo anterior e considere o subconjunto dos campos com fonte nula, $E_0 = \{x \in E | R(x)\}$, onde $R(x)$ significa divergência de x é nula. E' é o conjunto dos campos elétricos com fonte não nula em b. Note que nesse caso E' coincide com $E \backslash B$.

Propriedades
i) $(A^c)^c = A$; ii) $A \subset B \leftrightarrow B^c \subset A^c$; iii) $A = \emptyset \leftrightarrow A^c = U$;
iv) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e v) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (iv e v são as leis de Morgan)

2.2 Produto cartesiano, relações e funções

Par ordenado, noção construída a partir de conjunto: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Obs: se a=b então $(a, b) = \{\{a\}\}$(par odernado)$\neq \{a\}$(singleton). Na prática: $(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$.
Tripla ordenada $(a, b, c) = (a, (b, c)) = \{\{a\}, \{a, (b, c)\}\} = \{\{a\}, \{a, \{b, \{b, c\}\}\}\}$. Gastam-se muitas chaves para se definir exclusivamente com noção de conjunto! ***Mais prático tomar ordenamento como parte da estrutura axiomática***.

Produto cartesiano Conjunto de todos o pares ordenados. $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.

Generalização imediata $A \times B \times C$....

Relações

Uma relação R do conjunto A para o conjunto B definida por: $R \subset A \times B$. Um elemento de R é da forma $(a, b) \in A \times B$, escrito aRb. Obs: $aRb \wedge aRc$ não implica $c = b$.

Como conjuntos, relações herdam as noções de interseções e uniões.

Quando A=B, temos relação **em** A, $R \subset A \times A$. Ex: Considere $A = \mathcal{P}(B)$. A relação $R_\subset$ é definida como $(B_1, B_2) \in R_\subset \leftrightarrow B_1 \subset B_2$, onde $B_1, B_2 \in A$.
Outro exemplo importante é a **relação identidade**: para $a, b \in A$, $\mathcal{I}d_A = \{(a, b)|a = b\}$. Observe que a relação identidade satisfaz trivialmente às propriedades
1) Reflexiva, $(\forall a \in A)a\mathcal{I}d_A a$; 2) Simétrica, $a\mathcal{I}d_A b \leftrightarrow b\mathcal{I}d_A a$; Transitiva $a\mathcal{I}d_A b \wedge b\mathcal{I}d_A c \to a\mathcal{I}d_A c$.

Uma relação de equivalência é definida pelo conjunto de 3 requerimentos acima imposto a uma relação. Talvez seja necessário promover a relação a uma relação sobre A.
Consequência: **Classe de equivalência**. $[a]_R = \{b \in A|aRb\} = a/R$.Obs: $\{[a]_R \in A\} = A/R$. Conjunto de todas as classes de equivalências.
Propriedade: Cada elemento do conjunto pertence a uma única classe de equivalência. *Exemplo. Considere o conjunto de todos os campos vetoriais,* $\{\vec{A}(\vec{r})\}$, *potenciais da magnetostática. Defina a relação de gauge* $AG\widetilde{A} = \{(A, \widetilde{A})|\vec{A} = \vec{\widetilde{A}} + \vec{\nabla}\psi\}$, *para alguma função* $\psi(\vec{r})$. *A relação assim definida caracteriza a equivalência entre os potenciais relacionados por transformações de gauge. Os campos magnéticos não estão relacionados aos potenciais vetores, já que diferentes potenciais produzem os mesmo campos magnéticos, mas às classe de equivalência dos campo relacionados por transformações de gauge.*
Quais as classes de equivalência de $\mathcal{I}dA$*?*

Domínio: dom R=$\{x|\exists y \in B, xRy\}$; **Imagem**: imag R=$\{y|\exists x \in A, xRy\}$. Se imag R=B, então relação para B é dita relação sobre (onto) B. *Questão: É* $\mathcal{P}_A$ *ele próprio uma relação? Quais seriam domínio e imagem? É possível falar de classes de equivalência?*

final aula 28/04/2016

Funções Uma relação f de A para B é uma função se: 1) Para $a \in A$ e $b, c \in B$, $aRb \wedge aRc \to c = b$; 2) dom f=A. Notação para elementos da relação, $(a, b) \in f$: afb ou b=f(a). Notação para a relação $f : A \to B$. Obs imag f⊂ B.

Classificações: 1) Injetiva, se $f(x) = f(\widetilde{x}) \to x = \widetilde{x}$; 2) Sobrejetiva se Imag f=B; Bijetiva se satisfaz aos dois requerimentos acima, injetiva e sobrejetiva.

Imagem de um conjunto: Se $f : A \to B$, e $C \subset A$, $f(C) = \{y \in B|\exists c \in C, y = f(c)\}$.
Imagem inversa de um conjunto:Se $f : A \to B$, e $C \subset B$, $f^{-1}(C) = \{x \in A|\exists c \in C, c = f(x)\}$.

Teorema 2.19 ($f : A \to B$)
1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Obs: $(\forall A_1, A_2 \subset A), f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \leftrightarrow$ f é injetiva.
3) $A_1 \subset A_2 \to f(A_1) \subset f(A_2)$
4 $f(\emptyset) = \emptyset$

Teorema 2.22($f : A \to B$)
1) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
3) $B_1 \subset B_2 \to f^{-1}(B_1) \subset f(B_2)$.
4) $f^{-1}(B_1^c) = (f^{-1}(B_1))^c$;
5) $f^{-1}(B) = A$.

6) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
Observe que relações menos restritas 2.19-2 e $f(A) \subset B$ são substituídos por 2.22-2 e -5.

Transformação em X: $f : X \to X$ e f é bijetiva. Caso especial: Transformação identidade, $f = \mathcal{I}d_X$. (f(x)=x).

Composição de funções: $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. $h = gof$ se $h(x) = g(f(x))$.
Obs $f(X) \subset Y$, não necessariamente $f(X) = Y$.
Propriedade: Composição é associativa, ho(gof)=(hog)of.

Função inversa. $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$.
1) g é inversa à esquerda de f se gof=$\mathcal{I}d_X$, ie, g(f(x))=x.($\exists g \leftrightarrow$ f é injetiva.)
2) g é inversa à direita de f se fog=$\mathcal{I}d_Y$, ie, f(g(y))=y.($\exists g \leftrightarrow$ f é sobrejetiva)
3) inversa: $g = f^{-1}$ se satisfaz as duas condições acima. ($\exists g \leftrightarrow$ f é bijetiva)

Exemplos: $(f_1 : R \to R^+, f_1(x) = x^2)$ e $(f_2 := R^+ \to R, f_2(x) = \sqrt{x})$. $h_\pm(x) = \pm\sqrt{x}$ são inversas à direita de f_1. $g = x^2\Theta(x) + h(x)\Theta(-x)$ são inversas à esquerda de f_2 para qq h.

Extensão e restrição de funções

Sejam $A \subset X$, $f : X \to Y$, $f' : A \to Y$. Se $f(a) = f'(a), \forall a \in A$, então f é extensão de f' de A a X e f' é restrição de f de X a A. Notação $f' = f|_A$.
Função de Inclusão: restrição da identidade de X a A. $\mathcal{I}d_A = \mathcal{I}d_X|_A$. Então operação de restrição se reduz a composição de funções: $f|_A = fo\mathcal{I}d_A$. Isso é útil para obter propriedades da restrição, tais como continuidade, a partir da composição.

2.3 Conjuntos infinitos e cardinalidade

Conjuntos finitos:

Conjuntos básicos: $\mathcal{N}_n = \{1, 2, 3...., n\} = \{k \in N | 1 \leq= n\}$

A é Conjunto finito se houver bijeção de A para algum $\mathcal{N}_n$. Card(A)=n.(Cardinalidade)

Conjunto infinito: não é finito.

Enumeração de conjunto ∞: Correspondência biunívoca de A nos naturais N. Conjunto enumerável: É finito ou há enumeração aos Naturais.

Exs: N, $A = \{x \in N | \exists n, x = n^2\}$, Inteiros $\mathcal{Z}$.

Teorema: Todo subconjunto ∞ de conj. enumerável é enumerável. *Demo: Recursivamente retirar os elemento enumerados do conjunto que não pertencem ao subconjunto.*
Teorema(paradoxo de Galileu): A é infinito $\leftrightarrow \exists A' << A$, ie, A admite bijeção a subconjunto próprio.

Teorema: Usando o axioma da escolha se pode construir um subconjunto enumerável de qq conjunto infinito.

Axioma da ecolha: Para qq A, existe função de escolha Esc_A, cujo domínio é $\mathcal{P}_A$ e tal que $Esc_A : \mathcal{P}_A \to A | \forall B \in \mathcal{P}_A, Esc_A(B) \in B$. *Discutir*

Conjuntos enumeráveis: Exemplos
• Se A é enumerável, $A \times A$ também é. Método anti-diagonais Se a_i é enumeração de A, a enumeração de $A \times A$ é dada por exemplo como: $(a_i, a_j) \to b_{\frac{i(i+1)}{2} - j}$
• Corolário: Conj. dos racionais é enumerável. $x \in Q \to x = q/p$. Mas (q, p) define subconjunto de $N \times N$, e portanto é enumerável.

• Teorema: União enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. $A^\infty = \cup_{i=1..\infty} A_i$. Enumeração dos A_i, $\forall i,\ \ A_i \equiv \{a_{ij} | j = 1..\infty\}$. Enumeração dos (i,j) define enumeração do A^∞.
• Considere os conjunto dos números algébricos: soluções de equações polinomiais de grau n com coeficientes inteiros. Os polinômios, $\sum_{i=1}^n a_i x^i$, podem ser enumerados (índice $h = \sum_i |a_i| + n - 1$) e as raízes são finitas—> números algébricos, ex $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, são enumeráveis. (Teorema de Cantor)

Afinal: Todo conjunto é enumerável? Cantor novamente: $\mathcal{R}$ **não é enumerável.**
Demonstração: Por redução ao absurdo. Reduzir a 0<x<1. Enumerar os reais. Tomar para cada real r_i o j-ésimo dígito da descrição decimal de r_i. Formamos a matriz de números a_{ij}. Basta construir o número decimal qq com o cuidado de fazer o i-ésimo dígito distinto de a_{ii}. Esse é um número real entre 0 e 1 e distinto de todos os reais, já de difere de todo r_i no i-ésimo dígito. Contradição.

Chega-se à conclusão de que há número real transcendente: diferente de qualquer algébrico.

Curiosidade: Existem potencias irracionais de irracionais que são racionais. Demonstração não construtiva. Considerar $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $g = x^{\sqrt{2}} = 2$. Então se x for racional, o exemplo é x. Se x for irracional o exemplo é g. (Argumento típico da prova de Goeddel).

Equipolência: $A \sim B$ se existe bijeção entre A e B. Se escreve iguais cardinalidades.

Card(N)=$\aleph_0$ Aleph zero; Card(R)=c=Card(2^N), contínuo, como veremos. Obs: (2^N) é na realidade conjunto das **funções características, f=K** dos subconjuntos de N. $\forall A \in \mathcal{P}_N, 2^N = \{K_A : N \to \{1,0\} | K(x) = 1 \text{ se } x \in A, f(x) = 0 \text{ se } x \notin A\}$.

Hierarquia de cardinalidades: Todos pares de conjuntos são comparáveis. Quer dizer, ou existe injeção de A em B (Card(A)$\leq$ Card(B) $\iff$ A$\preceq$ B), ou o reverso, ou então ambos. Se existe injeção de A em B mas não existe de B em A então Card(A)<Card(B), A$\prec$B. Teorema de Zermelo.

Teorema de Schroder-Bernstein. Se valem as duas desigualdades acima então A é equipolente a B. (Duas injeções, de A em B e de B em A garantem a existência de bijeção)

Dois resultados importantes:
1) Card(A)<Card(2^A), teorema de Cantor.
2) $2^{\aleph_0} = c$ Daí: número de classes de infinitos é infinito!

Hipótese do contínuo. Não há cardinalidade intermediária entre Naturais e contínuos. Gödel mostra consistência das validade e não validade com teoria dos conjuntos.

Ordenamento A hierarquia associada à Cardinalidade remete a relação de ordenamento.
Ordem parcial(Conjunto +ordem parcial=poset)
Ordenamento parcial é relação no conjunto reflexiva, transitiva mas com requisito mais fraco que simetria: $aRb \wedge bRa \to a = b$. Simetria seria $aRb \implies bRa$. Exemplo: $\mathcal{P}_A$ com relação de ordem parcial $A_1 R A_b \iff A_1 \in A_2$
Ordem total ou linear: Para todo par de elementos ou aRb ou bRa. Ex: Q, $\leq$.
Boa ordenação: Para qq subconjunto existe mais precedente: $\forall A_i \in \mathcal{P}_A, \exists a_0 \in A_i | \forall a_j \in A_i, a_0 R a_j$.

Teorema de Zermelo: Todo conjunto pode ser bem ordenado. Obs: $\{x \in R | 0 < x < 1\}$ não é bem ordenado por $\leq$. Ninguém construiu explicitamente a boa ordenação.

2.4 Exercícios

Capítulo I

1)Verifique a tradução para o português usual e corrija: P(x) $\iff$ x é uma pessoa; A(x,y) $\iff$ x e y são amigos; F(x) $\iff$ x é feliz. $(\forall x)[P(x) \wedge \neg(\exists y)A(x,y) \rightarrow \neg F(x)]$ Tradução: Para todo x tal que x é pessoa e x e y são amigos, para qualquer y, segue que x é infeliz.

2) Verifique a argumentação e corrija: $\forall x \exists y(x - 2y = 0)$ é afirmativa falsa, uma vez que pode haver um y$\in \mathcal{N}$ tal que $x \notin \mathcal{N}$, pois x=y/2.

1.6; 1.16, 1.23 e 1.25.

1) Demonstrar o teorema 2.8

2) Dê exemplos de relações de equivalência na Física.

3) $A \subset B \rightarrow f(A) \subset f(B)$

4) Mostre que se A é enumerável (∞) então $\mathcal{P}_A$ não é enumerável. *Redução ao absurdo-argumento de Cantor $A = \{a_i\}$, i=1,2,3... $\mathcal{P}_A = \{A_i\}$. Considere a função característica de A_i, em A. $K_{ij} = K_{A_i}(a_j)$(= 0 se $a_j \notin A_i$, = 1 se $a_j \in A_i$. Se $\mathcal{P}_A$ é enumerável o conjunto de funções características também é. Construa agora a função $K(a_i)$, tal que $K_i = 0$ se $K_i i = 1$ e $K_i = 1$ se $K_i i = 0$). Essa função pertence a 2^A e define um subconjunto de A, cuja função característica difere de todas as funções características dos subconjuntos de A. Contradição.*

2.21) Mostre a equipolência entre intervalos $(0,1) \sim [0,1]$.*Basta tratar separadamente os racionais nos intervalos (enumeráveis) e tomar a identidade nos irracionais. Comentar função de Dirichlet: função característica dos racionais.*

5) Capítulo 1)

Capítulo 3

Números Reais e Complexos

3.1 Axiomas Básicos

Os reais formam um corpo ordenado e completo (s Dedekin) Isto é:
(R,+,·). R=conjunto. +=operação de soma, ·=operação de produto.

13 Axiomas

1-Corpo

A1)+:RXR→ R. (RXR é domínio)
Prop. de +: A2) Associativa; A3) Comutativa; A4) ∃ 0, neutro. A5) $\forall x \in R, \exists -x\ x + (-x) = 0$
A6) $\cdot : RXR \to$ R (RXR domínio)
Prop.: A7) Associativa, neutro; A8) Comutativa; A9) ∃1, neutro; A10) $\forall x \neq 0, \exists x^{-1} | x \cdot x^{-1} = 1$.
Prop de · e +: A11) Distributividade: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + y \cdot z$.
2) Relação de ordem, $x < y \iff y - x \in P$, onde P define o conjunto dos reais positivos.
A12) Ordenamento total: $R = \cup_{\text{disjunta}}(P, -P, \{0\}) | x, y \in P \to x + y \in P$ e $x \cdot y \in P, x \in P \to -x \in -P, x \in -P \to -x \in P$.
A13) Completeza: Axioma do Supremo. Todo conjunto não vazio limitado superiormente tem um supremo em R.

Panorama de estruturas

(S,+)
1) Semigrupo: (S,+), + é associativo.
2) Monoide: Semigrupo + 0;
3) Grupo: Monoide + -x;
4) Grupo abeliando: grupo comutativo;
(S,+,·), Distributiva
5) Anel · é associativa; 6) Anel comutativo, · é comutativo
7) Domínio integral (sobre inteiros): Anel mas não há divisor de zero, $0 \neq x \cdot y$ com $x, y \neq 0$
8) Anel com divisão $\exists x^{-1}$; Anel com divisão comutativa: corpo.

Consequências diretas do definição de corpo

Adição: i) zero é único; ii) -x é único; iii) $x + (-y) = z \leftrightarrow x = y + z$; iv) $x + z = y + z \leftrightarrow x = y$
demos: i) $0 + 0' = 0 = 0'$, *ii)* $x + -x + -x' = 0 + -x = 0 + -x'$ *iii)* $x - y = z \leftrightarrow x - y + y = z + y$
Multiplicação
i) 1 é único; ii) x^{-1} é único; iii) $x \cdot y^{-1} = z \leftrightarrow x = z \cdot y$; iv) $x * y = 0 \leftrightarrow 0 \in \{x, y\}$

Distributividade

i)x·0=0·x=0; ii) (-x)·y=-x·y; iii) (-x)·(-y)=x·y

Exemplos de corpos 1) $Z_2 = \{0, 1)\}$,

+	0	1
0	0	1
1	1	0

,

·	0	1
0	0	0
1	1	0

2) Q. Questão: $\mathcal{Z}$ é corpo?

3) $Q + \sqrt{2}Q'$.

4) $\mathcal{H}$ é o conjunto das funções racionais. $R(x) \equiv \frac{P(x)}{Q(x)}$, com Q P polinômios, sem fatores comuns, e com Q não identicamente nulo. Soma e produto definidos de maneira usual tendo o cuidado de fatorar o resultado. $0 = 0$ e $1 = 1$!

Corpos ordenados

Noção maior e menor. i) $x > y \iff x - y \in P$; ii) $x \geq y \iff x > y \vee x = y$; iii) $x < y \iff y > x$; iv) $x \leq y \iff y \geq x$. Obs: É fácil verificar que se trata de relação de ordem conforme capítulo anterior.

Ordenamento parcial é relação no conjunto reflexiva, transitiva mas com distinto de simetria: $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$. Simetria seria $aRb \implies bRa$. Exemplo: $\mathcal{P}_A$ com relação de ordem parcial $A_1RA_b \iff A_1 \subset A_2$

Ordem total ou linear: Para todo par de elementos ou aRb ou bRa. Ex: Q, $\leq$.

Boa ordenação: Para qq subconjunto existe mais precedente: $\forall A_i \in \mathcal{P}_A, \exists a_0 \in A_i | \forall a_j \in A_i, a_0Ra_j$. Os naturais são bem ordenados, o conjunto $1/n$, n=1,2,3.. não é bem ordenado, pelo ordenamento usual.

Exemplo: $Q + \sqrt{2}Q'$. pode ser ordenado de duas maneiras distintas: Ou com $x + \sqrt{2}y \leq 0$, ou com $x - \sqrt{2}y \leq 0$. Conjunto funções racionais, $\mathcal{H}$, pode ser ordenado. Os positivos são definidos como as funções racionais em que os coeficientes principais de $P(x)$ e $Q(x)$ tem o mesmo sinal.

Teorema 3.6

i) $x \neq 0 \leftrightarrow x^2 > 0$; ii) $x > y \rightarrow x + z > y + z$; iii) $x > y, z > 0 \rightarrow x \cdot z > y \cdot z$

Sobre intervalos e limitantes

Intervalos abertos e fechados:

Intervalo aberto, $(a, b) = \{x | a < x < b\} \equiv \mathrm{Bol}((a + b)/2, (b - a)/2) \equiv \mathrm{Bol}(c, R)$, bola aberta centrada em $c = (a + b)/2$ de raio $R = (b - a)/2$. Obs. bola deletada $\mathrm{dBol}((a + b)/2, (b - a)/2) \equiv (a, b) \backslash \{(b + a)/2\}$, retira-se o centro.

Intervalo fechado, $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$, semi-fechado etc. (a, ∞) etc. $(-\infty, \infty) = R$

Módulo $|x| = x$ se $x \in P$, $-x$ se $x \in -P$. Propriedades: i) $\forall R > 0, \mathrm{Bol}(0, R) = \{x | |x| < R\}$; ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$. iii) Desigualdade triangular $|x + y| \leq |x| + |y|$. Linguagem alternativa: $|a - b| = d(a, b)$. Propriedades: 1) $d(a, b) = d(b, a)$; 2a) $d(a, b) \geq 0$; 2b) $d(a, b) = 0 \leftrightarrow a = b$ e 3) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$. Nomenclatura: d é **distância** entre os números a e b. $|x| = d(x, 0)$.

Axioma do supremo

Cota superior. O número a é cota superior do conjunto X se $x \in X \rightarrow x \leq a$. Cota inferior $\leq \rightarrow \geq$. **Supremo** de X: $\sup X$ = menor cota superior pertencente a R. Ínfimo, $\inf X$ = maior cota inferior. Obs: se $b < \sup X, \exists x \in X | b < x \leq \sup X$. Se não, b seria cota superior menor.

Máximo: Se $\sup X \in X$, $\sup X$ é chamado máximo de X, $\max X$. Analogamente para Mínimo, $\min X$.

Axioma do supremo, $\exists$ supremo em $\mathcal{R}$, garante a completeza de $\mathcal{R}$: $\{x \in R | x^2 \leq 2\}$ tem supremo em $\mathcal{R}$. Poderia ser menor e não menor ou igual $\sup \mathrm{Bol}(0, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Obs: Q não é completo: $\sup(\mathrm{Bol}(0, \sqrt{2}) \cap Q) = \sqrt{2} \notin Q$.

Teorema: Pode-se inverter superior-supremo por inferior-ínfimo.

Teorema: N não é limitado superiormente. *Suponha* $supN \equiv \alpha$, $\alpha - 1$ *não é limite superior,* $\exists n' > \alpha - 1 . n' \in N$ *e* $n' + 1 > \alpha$.

Propriedade Arquimediana: $\forall a$ e $b \in \mathcal{R}^+, \exists n \in \mathcal{N} | n \cdot a > b$. *Demo:* $\exists n > \frac{b}{a} \leftrightarrow \exists na > b$
Corolário: $\forall \epsilon \in \mathcal{R}^+, \exists n \in \mathcal{N} | \frac{1}{n} < \epsilon$, ie $\mathrm{Bol}(0, \epsilon) \cap Q \neq \emptyset$.
Generalização: Entre qq par de reais há um racional, i.e., os irracionais são densos em $\mathcal{R}$, $\forall x, \forall \epsilon \in \mathcal{R}^+, \mathrm{Bol}(x, \epsilon) \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$.
Demo: queremos mostrar que há $\frac{p}{q} \in Bol(z, \epsilon)$ *onde z, supomos aqui z>0 por simplicidade, é o centro do intervalo, e* ϵ *sua semi-largura. Tomamos o inteiro positivo* $q > \frac{1}{\epsilon}$*, i.e.,* $\frac{1}{q} < \epsilon$*. E tomamos o inteiro positivo* $p > qz$*, ou* $\frac{p}{q} > z$*, (1). Podemos escolher p de maneira que* $p - 1 \leq qz$*, isto é, p é o menor inteiro satisfazendo (1). Temos então* $p - 1 \leq qz$*, ou* $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq z \to \frac{p}{q} \leq z + \frac{1}{q} < z + \epsilon \to \frac{p}{q} < z + \epsilon$*, (2). As condições (1) e (2) são as que queríamos encontrar*
Contra-exemplo: $\mathcal{H}$ é um corpo ordenado que não satisfaz à propriedade arquimediana. $n = n$, e $n < x^2$. Consequentemente os "racionais", funções constantes racionais, não são densos no conjunto das funções racionais.

Corolário: Entre dois reais sempre há um irracional, basta raciocinar em termos de $x\sqrt{2}$.

Aplicações: T. 3.20. Existe solução única para $x^n = a$, ou $\sqrt[n]{a}$ é única. *Demo: 1) Unicidade* $0 = x^n - y^n = (x - y) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k}_{>0} \to x = y$. *2) Existência. Seja* $X = \{x > 0 | x^n < a\}$*. X é não vazio já que* $\frac{a}{a+1} \in X$*. Daí X tem supremo,* $\sup X \equiv c$*. A demo, no livro do Nivaldo, mostra que supor tanto* $c^n < a$ *como* $c^n > a$ *são contraditórios.*

Isomorfismo entre corpos ordenados: Trata-se da existência de mapeamento $f : K \to K'$ respeitando adição, multiplicação e ordem.

Teorema da unicidade: Todo corpo ordenado completo é isomorfo aos reais.

3.2 Corpo dos Complexos

Trata-se de corpo não ordenado. $\mathcal{C} = \{(a \in \mathcal{R}, b \in \mathcal{R})\}$; $(a, b) + (c, d) = (a + d, b + d)$; $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$.

Características: Elementos neutros (respectivamente) 0=(0,0) e 1=(1,0).
(x,0) é isomorfo aos reais, levando ao abuso de linguagem x=(x,0). $i \equiv (0, 1)$ é tal que $i^2 = -1$, significando que é corpo não ordenado.
Notação: $z = a + b \cdot i$, $z^* = a - b \cdot i$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $a = \Re(a, b)$ e $b = \Im(a, b)$

Teorema 3.25 i) $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \leftrightarrow z = 0$; ii) $|\Re z| \leq |z|$ e $|\Im z| \leq |z|$; iii) $|z|^2 = z \cdot z^*$; iv) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ e v)(Desigualdade triangular) $|z + w| \leq |z| + |w|$.
Demo de v)$|z + w|^2 = (z + w) \cdot (z + w)^* = |z|^2 + |w|^2 + 2\Re(zw) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|) = (|z| + |w|)^2$

Desigualdade de Schwartz $|\sum_i z_i w_i^*|^2 \leq \sum_i |z_i|^2 \cdot \sum_k |w_k|^2$
Demo $A \equiv \sum_i |z_i^2|$, $B \equiv \sum_i |w_i^2|$ *e* $C \equiv \sum_i |z_i w_i^*|$*. Por suposição tome* $B \neq 0$*, portanto* $B > 0$*.*

Veja que $0 \leq \sum_i |Bz_i - Cw_i|^2 = B^2 \sum_i |z_i|^2 - BC^* \sum_i z_i w_i^* - BC \sum_i z_i^* w_i + |C|^2 \sum_i |w_i|^2 = B(BA - |C|^2) \to |C|^2 \leq AB$

Generalização: corpo dos quaternions (vez por outra se tenta usar na Física)
$z = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k$(+cíclica), porém $j \cdot i = -k$, $\cdot$ não mais comutativa!

3.3 Construções dos reais

Duas principais abordagens com o objetivo de definir os reais a partir dos racionais.

Cortes de Dedekin- I-Definição de um corte α dos racionais, $\alpha \subset \mathcal{Q}$ é definido por: 1) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq Q$. 2) $\forall p \in \alpha, \forall q \in \mathcal{Q}, q < p \to q \in \alpha$. 3) $\forall p \in \alpha, \exists r \in \alpha, r > p$, α é aberto.
Operações de soma e produto são definidas emulando o que se espera de soma e produto dos elementos maximais de α, que não existem em $\mathcal{Q}$. Exemplos de cortes: $\forall q \in \mathcal{Q}, \alpha_q = \{x \in Q | x < q\}$ e $\forall q \in \mathcal{Q}, \alpha_{\sqrt{q}} = (-P) \cup \{x \in Q | x^2 < q^2\}$.
II-Relação de ordem definida entre cortes: $\alpha \prec \beta \iff \alpha \subset \beta \wedge \alpha \neq \beta$.
III- Teorema: Espaço dos cortes é completo, i.e. todo conjunto de cortes não vazio e limitado tem máximo. Por ex. $\alpha_{\sqrt{q}} \equiv \sqrt{q}$.

Completação das séries de Cauchy- Séries de Cauchy serão definidas. Os reais podem ser construídos a partir da consideração da classe de equivalência de séries de Cauchy dos racionais. Construção devida a Cantor leva a conjunto equivalente ao dos cortes de Dedekin.

Exercícios

0)

1) Considere um conjunto A qualquer e uma relação definida no conjunto das partes de A da forma $A \prec B$ se $A \subset B$, essa relação define
1a) Uma ordem parcial mas não uma ordem total.
1b) Uma ordem total, mas não uma boa-ordenação.
1c) Uma boa ordenação.

2) O conjunto Q, com a definição de ordem usual, apresenta
2a) Uma ordem parcial mas não uma ordem total.
2b) Uma ordem total, mas não uma boa-ordenação.
2c) Uma boa ordenação.

3) O conjunto Q, com a definição de ordem usual, apresenta
3a) Uma ordem parcial mas não uma ordem total.
3b) Uma ordem total, mas não uma boa-ordenação.
3c) Uma boa ordenação.

4) O conjunto $\{\frac{1}{n}\}$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3...$ apresenta
4a) Um supremo mas não um máximo.
4b) Um máximo mas não um supremo.
4c) Um máximo e um supremo.
4c) Nem máximo nem supremo.

5a) Demonstração de que os naturais são ilimitados: *demo Supor limitado, daí tem supremo,* α. *Daí* $\forall n \in N, n \leq \alpha$ *e também* $\exists k \in N, k \geq \alpha - 1$

5) Demonstração que os irracionais são densos em $\mathcal{R}$, $\forall x, \forall \epsilon \in \mathcal{R}^+, \mathrm{Bol}(x, \epsilon) \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$.
. Complete

Demo: queremos mostrar que há $\frac{p}{q} \in Bol(z, \epsilon)$ *onde z, supomos aqui z>0 por simplicidade, é o centro do intervalo, e* ϵ *sua semi-largura. Tomamos o inteiro positivo* $q > \frac{1}{\epsilon}$, *i.e.,* $\frac{1}{q} < \epsilon$. *E tomamos o inteiro positivo* $p > qz$, *ou* $\frac{p}{q} > z$, *(1). Podemos escolher p de maneira que* $p - 1 \leq qz$, *isto é, p é o menor inteiro satisfazendo (1). Temos então* $p - 1 \leq qz$, *ou* $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq z \rightarrow \frac{p}{q} \leq z + \frac{1}{q} < z + \epsilon \rightarrow \frac{p}{q} < z + \epsilon$, *(2). As condições (1) e (2) são as que queríamos encontrar* A partir daí: O conjunto $\{x \in Q | x^2 < 2\}$, apresenta elemento maximal?

6) **Desigualdade de Schwartz** $|\sum_i z_i w_i^*|^2 \leq \sum_i |z_i|^2 \cdot \sum_k |w_k|^2$
Demo $A \equiv \sum_i |z_i^2|$, $B \equiv \sum_i |w_i^2|$ *e* $C \equiv \sum_i |z_i w_i^*|$. *Por suposição tome* $B \neq 0$, *portanto* $B > 0$. *Veja que* $\mathbf{0} \leq \sum_{\mathbf{i}} |\mathbf{B z_i} - \mathbf{C w_i}|^{\mathbf{2}} = B^2 \sum_i |z_i|^2 - BC^* \sum_i z_i w_i^* - BC \sum_i z_i^* w_i + |C|^2 \sum_i |w_i|^2 = B(BA - |C|^2) \rightarrow |C|^2 \leq AB$

7) Exercícios: 3.1; 3.2; 3.10

8) Discussão sobre o conjunto das funções racionais, $\mathcal{H}$.
1) Não é arquimediano: qq polinômio não nulo e "positivo"é limite superior de $\mathcal{N}$
2) Daí esse corpo não pode ser completado. Em um corpo completo os naturais são ilimitados. Obs: pode ser completado no sentido de Cauchy, mas não no sentido de supremo.
3) Os número racionais não são densos.*Demo Suponha os racionais densos. Então, para uma dada função racional f,* $\exists \frac{q}{p}$ *tal que* $0 < \frac{p}{q} \frac{1}{f}$. *Daí* $0 < \frac{1}{q} \leq \frac{p}{q} < \frac{1}{f}$, *daí,* $n > f$. *Como f é arbitrário, não existiria cota superior para* $\mathcal{N}$.

Capítulo 4

Sequências e Séries

4.1 Sequências

Enumeração nos reais: $a : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{R}$. $a(n) = a_n$, n=1,2,3...i.e. temos $a_1, a_2, a_3, ...$

Convergência e Limite: $\exists a, \forall \epsilon \in \mathcal{R}^+, \exists N, n > N \rightarrow d(a_n, a) \equiv |a_n - a| < \epsilon$. A série é convergente para a, $a_n \longrightarrow a$. Série divergente: não há limite. Caso particular de divergência: Tende a ∞ (ou $-\infty$); $\forall r \in \mathcal{R}, \exists N, n > N \rightarrow a_n > r$ (ou $< r$).
Demonstração de que dada série é convergente:1) identificar candidato a limite. 2) demonstrar.
Exs. 1) $a_n = \frac{n}{n+1} 2a_1$. Candidato $a = 2a_1$. $d(a_n, a) \equiv |a_n - a| = |a|\frac{1}{n+1} < \epsilon$ se $n + 1 > \frac{a_1}{\epsilon}$. $N \equiv I^+(\frac{2a_1}{\epsilon})$. Considere a função $I^+(x)$, cujo valor é o menor inteiro maior ou igual ao o argumento x. Basta escolher $n + 1 > I^+(\frac{2a_1}{\epsilon})$. Em outras palavras: $n > I^+(\frac{2a_1}{\epsilon})$, finito, garantir que $a_n \in \mathrm{Bol}(a, \epsilon)$ é o argumento fulcral.
2) $a_n = a_0 + dn$. Série divergente: $d(a_n, x) \equiv |a_n - x| = dn|1 + \frac{a_0 - x}{dn}|$. Ocorre q $\frac{a_0 - x}{dn}$ decresce arbitrariamente com o valor de n e pode ser limitado a um valor menor que um, por exemplo $< \frac{1}{2}$, de maneira que $|1 + \frac{a_0 - x}{dn}| > \frac{1}{2}$, fazendo com que a distância entre a_n e x aumente, para qq x. Não há limite.
Há limite para $a_n = \begin{cases} a_{2n} = a_0 + 2nd \\ a_{2n+1} = 1 \end{cases}$? *E para* $a_n = \begin{cases} a_{2n} = \frac{2n}{2n+1} 2a_1 \\ a_{2n+1} = 1 \end{cases}$?

Unicidade do limite: Se existe limite, é único. *Demo: Basta usar desigualdade triangular, para os dois limites, a e* $\widetilde{a}$, $d(\widetilde{a}, a) \leq d(a, a_n) + d(a_n, \widetilde{a}) \longrightarrow 0$.

Limitação da sequência convergente: Toda seq converg, $a_n \longrightarrow a$, é limitada. *Demo: basta limitar* $d(a_n, a)$ *a um número qq* ($d(a_n, a) \leq d$) *tomando* $n > N$ *e o limite superior será o maior dos números no conjunto* $\{(a + d), a_1, a_2, ..., a_N\}$. *Analogamente para o limite inferior.*
Importante: recíproca não verdadeira.

Exemplos canônicos de sequências:
1) $a_n = a^n \rightarrow 0$, se |a|<1.*Análise.* $a \equiv \frac{\pm 1}{1+r}$, $r > 0$. *Usando* $\neq$ *de Bernoulli,* $(1 + r)^n \geq 1 + nr$. *Daí* $0 < |a^n| = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr} < \frac{1}{nr} < \epsilon$ *se* $n > \frac{1}{r\epsilon}$. *Caso* $|a| > 1$, $|a| \equiv 1 + r \rightarrow |a_n| > 1 + nr \rightarrow$ *não limitada. Caso* $a = 1$, *sequência converge trivialmente. Caso* $a = -1$ *oscilante, diverge. Demonstre a* $\neq$ *Bernoulli por indução.*
2) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$. *O suspeito é que o limite é 1. Usando desigualdade restringida,* $(1 + r)^n \geq 1 + nr + \frac{n(n-1)}{2} r^2$. $h_n \equiv n^{\frac{1}{n}} - 1$, *ou* $n^{\frac{1}{n}} = h_n + 1$ *ou ainda* $n = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$.

Para todo $n > 1$ segue que $h_n^2 < \frac{2}{n=1} \longrightarrow 0 \to n^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$

Propriedades dos limites:

0) $(a_n \longrightarrow 0) \wedge (b_n$ limitada$) \to a_n b_n \longrightarrow 0$

1) Se $a_n \longrightarrow a \wedge b_n \longrightarrow b$, então

1a) $(a_n + b_n) \longrightarrow a + b$; 1b) $ca_n \longrightarrow ca$; 1c) $a_n b_n \longrightarrow ab$; 1d) Se $b \neq 0$, $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

Demo 1c) $a_n b_n = \underbrace{(a_n - a)}_{\longrightarrow 0} \cdot \underbrace{b_n}_{\text{limitado}} + a \underbrace{(b_n - b)}_{\longrightarrow 0} + ab$;1d) $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \underbrace{(b_n - b)}_{\longrightarrow 0} \quad \underbrace{\frac{1}{b_n b}}_{\text{limitado}}$

Séries crescentes e decrescentes, resp., $a_{n+1} \geq a_n$ e $a_{n+1} \leq a_n$. Se limitadas superiormente, resp. inferiormente, tem limite. *Demo: Limitada$\to$ $\exists$ supremo$\to$ $\exists$ elemento tão próximo qto queira do supremo$\to$ todos elementos seguintes tbm próximos.* Corolário: Séries crescentes ou decrescentes não convergentes tendem a $\pm\infty$.

Ex de sequência monotonicamente crescente importante (relacionada à Série harmônica). $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

1) Crescente. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+2}{n+1}) > \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$, onde usamos q $\frac{1}{n} > \ln(\frac{n+1}{n}) > \frac{1}{n+1}$, afinal $\ln \frac{n+1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \begin{cases} < \int \frac{1}{n} dx = \frac{1}{n} \\ > \int \frac{1}{n+1} dx = \frac{1}{n} \end{cases}$.

2) Limitada. Desigualdade acima leva a $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) < 1 + \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.

Conclusão: Sequência tem limite, conhecido como constante de Euler-Marcheroni $\gamma \approx 0,577...$ *Questão, à luz do resultado acima, a sequência, $a'_n == \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, tem limite?*

Critério básico para valiar se seq é convergente: Confronto com série conhecida, **sanduíche**.

1) $(a_n \leq b_n \wedge b_n \longrightarrow b \wedge a_n \longrightarrow a) \to a \leq b$.

2) $a_n \leq b_n \leq c_n \wedge a_n \longrightarrow a \wedge c_n \longrightarrow a \to b_n \longrightarrow a$.

Demo: 2) Basta escolher N_a e N_b que garanta $d(a_n, a) < \epsilon$ assim como $d(c_n, c) < \epsilon$. Daí $a - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \epsilon$, ie, $d(a, b_n) < \epsilon$.

Subsequência: Eliminam-se membros da sequência sem mudar a ordem. Função sobrejetiva f, $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N} | f(n+1) > f(n)$. $a'_n = a_{f(n)}$. Notação $f(k) = n_k$

Teorema: $a_n \longrightarrow a \to a_{n_k} \longrightarrow a$.

Teorema Bolzano-Weierstrass. Toda sequência limitada dos reais tem subsequência convergente.

Demo: Método da bi-secção do intervalo de variação. $(a, b) \longrightarrow (a_1, b_1)$ onde $(a_1, b_1) = \begin{cases} (a, \frac{a+b}{2}), \text{ se há } \infty \text{ termos nesse intervalo} \\ (\frac{a+b}{2}, b), \text{ se há } \infty \text{ termos nesse outro intervalo} \end{cases}$. Repetindo ∞mente obtém-se intervalos cuja amplitude de variação vai a zero, contendo ∞ termos da sequência. A intersecção dos intervalos selecionados define um único ponto. Para ficar claro: tome o intervalo de variação inicial como sendo, por definição, $[0, 1]$. Se o primeiro intervalo selecionado for $[0, \frac{1}{2}]$, nesse intervalo e defina o número, em notação binária $0, 0$, e teremos todos os a_j selecionados a uma distância $d \leq 0, 5$ desse ponto. Um desses a_j chamamos de c_1. Se o segundo intervalo selecionado for, digamos, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, defina o número $0, 01$, e escolha um membro da sequência para ser c_2. Prosseguindo, a cada escolha na primeira metade do intervalo define-se o dígito $b_j = 0$ e se a escolha for a segunda metade do intervalo define-se o dígito $b_j = 1$. A função de escolha $b_j : N \longrightarrow \{0, 1\}$ define um número único

em notação binária, $0, b_1b_2b_3....$ Esse número define valor para o qual converge subsequência escolhida, c_j, pois trucando-se em ordem $j = N$, todos os membros da subsequência com $j > N$ estão a uma distância $d < 2^{-N}$ do limite. A generalização para intervalo qq é imediata. A sequência assim selecionada é então convergente.
Questão: O mesmo raciocínio vale nos racionais?

Sequências de Cauchy (Completeza dos $\mathcal{R}$)

Seq. Cauchy: $d(a_n, a_m) \longrightarrow 0$, i.e., $\forall \epsilon \exists N, (m, n > N) \rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$.*Exercício: subsequência de Cauchy é também Cauchy.*

Teorema 1) Convergência $\rightarrow$ Cauchy. *Demo: De fato pode-se escolher $n, m > N$ de maneira que $d(a, a_n) < \frac{\epsilon}{2} \wedge \neq -triangular \rightarrow d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \epsilon$.*
Teorema 2) Cauchy $\rightarrow$ Convergência. 2a) Cauchy é limitada. Escolhendo N que restrinja a $d(a_n, a_m) < \epsilon = d$ se pode, fixando m, verificar que a_n, após $n = N$ é limitada a $a_m \pm d$. Escolhendo máximo e mínimo de $\{a_i, a_m \pm d\}$, i=1,2..N, se tem limite superior e inferior. Limitação implica existência de subsequência convergente, $a_{p_k} \longrightarrow a$. Subseq de Cauchy serve de ponto de apoio para a convergência da sequência usando triangulação, já que $d(a, a_n) \leq \underbrace{d(a, a_{p_k})}_{<\epsilon/2} + \underbrace{d(a_{p_k}, a_n)}_{<\epsilon/2} < \epsilon$.

Questão: Seq de Cauchy de racionais tem limite racional?
Conclusão, em $\mathcal{R}$, Cauchy $\leftrightarrow$ Convergente.

Corolário: nos complexos convergência$\leftrightarrow$Cauchy.
Demo: $d(z_n, z_m) \equiv |z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_N - y_m)^2} \geq d(x_n, x_m) \rightarrow d(x_n - x_m) \leq d(z_n - z_m)$.
Daí: z_n-Cauchy$\rightarrow$ x_n, y_n Cauchy. Daí, $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ e portanto $z_n \longrightarrow x + iy$

Limites superiores e inferiores, limsup e liminf.

Nomenclatura:
- **Cota superior**: a é cota superior de $\{a_n\}$ se $a_n \leq a$. Análogo p cota inferior.
- **Supremo de um conjunto**: É a menor cota superior. Análogo para **ínfimo**, maior cota inferior. Obs: Supremo ou ínfimo não precisam pertencer ao conjunto.*Qual o supremo dos número irracionais entre 0 e 1?*

Supremo de ordem n: $\overline{a}_n$= supremo dos a_k com $k \geq n$. Análogo ínfimo $\underline{a}_n$. Por definição $\overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n$ e $\underline{a}_{n+1} \geq \underline{a}_n$. Propriedade $\overline{a}_n \geq \underline{a}_n$

Seja uma sequência limitada. $\overline{a}_k$ é sequência limitada decrescente e $\underline{a}_k$ é sequência limitada crescente. Daí existem:
Limite superior: $\overline{\lim}\, a_n = \limsup a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \overline{a}_n$
Limite inferior: $\underline{\lim}\, a_n = \liminf a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \underline{a}_n$
Propriedade: $\liminf \leq \limsup$. Ex: $a_n = \sin(\alpha n)$. Considerar $\alpha\pi \in \mathcal{Q}$ e $\alpha\pi \notin \mathcal{Q}$.

Teorema da convergência: a_n, limitada $\longrightarrow a \leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = a$ *Demo:* .

Comentário sobre construção dos reais de Cantor: A ideia é tomar a classe de equivalência das seq de Cauchy como os números reais. Duas seq de Cauchy, x_n e y_n, com $x, y \in \mathcal{Q}$ são equivalentes se $|x_n - y_n| \longrightarrow 0$.
Exercício: Demonstre que duas seq de Cauchy equivalentes convergem para o mesmo valor. Solução: Assegure-se que $d(a_k, a) < \frac{\epsilon}{3}$, $d(b_k, b) < \frac{\epsilon}{3}$ e $d(a_k, b_j) < \frac{\epsilon}{3}$. Então veja que $d(a, b) \leq \underbrace{d(a, a_k)}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{d(a_k, b_j)}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{d(b_j, b)}_{<\frac{\epsilon}{3}} < \epsilon$

4.2 Séries numéricas

Sequência, s_n, $s_1, s_2, s_3, ..,$ $\iff$, série a_n, $\sum a_n$.

Série leva a sequência $s_n = \sum_{k=1}^n a_n$. Sequência leva a série $a_n = s_n - s_{n-1}$, com $s_0 \equiv 0$.

Série converge $\iff$ Seq. converge. Daí: Série convergente$\rightarrow$ termo geral vai a zero.

Exemplos importantes:

1) Série geométrica. Repare termo inicial. $a_n = a^n$, $s_n = \sum_{k=0}^n a_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. De fato $s_n - s_{n=1} = a^n$ e $s_0 = 1$. Converge $|a| < 1$, diverge $|a| \geq 1$. Se $a \rightarrow z$(complexo), mesmo resultado..

2) Série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. De fato já vimos que $s_n = \sum k = 1^n - \ln(n+1)$ é convergente. Como $ln(n)$ diverge, a série harmônica diverge. Argumento interessante: Nicole de Oresme, soma sucessiva sobre 2^p termos para $p = 1, 2, 3$.

3) Série harmônica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *Argumento de Nicole de Oresme para série com termos positivos decrescentes,* $0 < a_{n+1} < a_n$.
$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. $s_{n+1} > s_n$. *Somar sobre agrupamento de termos.*
$s_{2^p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} v_{k+1} = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{m=0}^{2^k-1} a_{2^k+m}\right) = \underbrace{(a_1)}_{v_1} + \underbrace{(a_2+a_3)}_{v_2} + \underbrace{(a_4+a_5+a_6+a_7)}_{v_3} + \ldots.$
$t_p \equiv 2^p a_{2^p} > v_p > 2^p a_{2^{p+1}} = \frac{1}{2} 2^{p+1} a_{2^{p+1}} \equiv \frac{1}{2} t_{p+1}$.
Daí $\sum v_p$ *converge*$\leftrightarrow$ $\sum t_p$ *converge. Particularizando, considere* $a_n = n^{-q}$, *temos,* $a_{2^p} = \frac{1}{2^{pq}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{nq}} = \sum_n (2^{1-q})^n$, *que já vimos ser* ***convergente se*** $q > 1$ ***e divergente no caso contrário****.*
Comentário $\sum_{n=1}^{\infty} n \neq \frac{-1}{12}$.

Transformações que não mudam condição de convergência:
1) Combinações lineares termo-a-termo. Análogo a sequências.
2) Convolução (ou produto de Cauchy) de séries convergentes é convergente se uma das séries for positiva. ($a_n > 0$, $a_n \longrightarrow a$ e $b_n \longrightarrow b$) $\rightarrow c_n \longrightarrow ab$, onde $c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$.
Discussão, não garante a convergência: produto ponto a ponto de séries e convolução das séries $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ *consigo mesma.* $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n [(n-k+1)(k+1)]^{-\frac{1}{2}}$. $|c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$. *Usamos* $(n = k+1)(k+1) = (\frac{n}{2}+1)^2 - (\frac{n}{2}-k)^2 \leq (\frac{n}{2}+1)^2$. *Porém: Se série produto de séries convergentes é convergente, então o limite coincide com produto dos limites das componentes.*

Séries Positivas e Convergência absoluta

Série de termos positivos: Definição: $a_n > 0$. Definição menos restritiva, $\exists N | n > N \rightarrow a_n > 0$.

Convergente$\leftrightarrow$ Limitada. Divergente$\leftrightarrow$ Diverge para ∞.

Comparação de séries positivas: Se $a_n \leq b_n$ a Convergência de b_n assegura a de a_n e a, logicamente, divergência de a_n assegura a divergência de b_n.

Exemplo interessante: número (neperiano) e.

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. *Para* $n > 2$, $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$. *Daí* $e < 1 + 1 + \sum_0^{\infty} (\frac{1}{2})^k = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$.

Convergência absoluta e condicional.

$|a_n|$ converge=convergência absoluta. Se a_n converge, mas não absolutamente, convergência condicional.

Critério de Cauchy para $\sum a_n$: Sequência de Cauchy: $|s_n - s_p| \longrightarrow 0$, quando $n, p \longrightarrow \infty$. Como $s_n - s_p = \sum_{k=n}^p a_k$ e como sequência de Cauchy $\leftrightarrow$ sequência convergente (porquê??), temos o critério para convergência d qq série: $\forall \epsilon \exists N | \forall p > 0, n > N \rightarrow \sum_{k=n}^p a_k < \epsilon$.

Consequência imediata: Convergência absoluta implica convergência.

Testes padrões para convergência de séries: todos se baseiam em comparação com alguma série conhecida.

1) Teste da razão ou d'Alembert, $L \equiv \limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ e $L' \equiv \liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Daí i) $L < 1 \rightarrow$ convergência abs.; ii) $L' > 1 \rightarrow$ divergência; iii) Demais casos, incluindo, $L = L' = 1$, inconclusivo.

2) Teste da Raiz ou de Cauchy, $L \equiv \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ e $L' \equiv \liminf \sqrt[n]{|a_n|}$. Daí i) $L < 1 \rightarrow$ convergência abs.; ii) $L' > 1 \rightarrow$ divergência; iii) $L = L' = 1$, inconclusivo. Obs: Teste da Raiz mais poderoso que o da razão.

3) Teste integral ou de Maclaurin, f(x) é função positiva, decrescente e integrável em qq intervalo com $x > 0$. Então como $\sum_{k=2}^{n} f(k) < \int_1^n f(x)dx < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ temos que, definindo $g(x) = \int^x f(y)dy$, se $\lim_{x\longrightarrow\infty} g(x)$ existe (é finito) então a série é convergente. Se limite é infinito a série é divergente.
Aplicação importante: Função zeta de Riemann. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. $\int_1^y x^{-s}dx = \frac{1}{1-s}(\frac{1}{y^{s-1}} - 1)$, *que converge se* $s > 1$ *e diverge se* $s \leq 1$. *A função zeta de Riemann é usada para somar séries divergentes.* $\sum_{n=0}^{\infty} n \longrightarrow 1\frac{1}{12}$

4) Critério de Raabe, $L \equiv \lim_{n\longrightarrow\infty} n(1 - |\frac{a_{n+1}}{a_n}|)$. i) $L > 1 \rightarrow$ convergência abs.; ii) $L < 1 \rightarrow$ diverge ou converge condicionalmente; iii) $L = 1$, inconclusivo.

5) Critério de Gauss. $|\frac{a_{n+1}}{a_N}| = 1 - \frac{L}{n} + \frac{c_n}{n^2}$ e $|c_n| < P$, e limitado, i) $L > 1 \rightarrow$ convergência abs.; ii) $L' \leq 1 \rightarrow$ diverge ou converge condicionalmente.

Séries alternadas

Sinais trocam de valor sucessivamente.

Resultado importante> Teste de Leibnitz. Se o módulo vai a zero monotonicamente então a série alternada converge. Adicionalmente o erro cometido ao truncar a série, tem módulo menor que o módulo do primeiro termo desprezado.

Ex: Veremos que $ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$. *Essa série converge para* $0 < x \leq 1$. *O caso* $x = 1$ *é interessante.*

Rearranjo de séries:

Trata-se d qq mudança na enumeração. Corresponde a realizar uma bijeção dos naturais. $K : N \longrightarrow N$, $k_n = k(n)$ e $n_k = n(k)$. $b_k = a_{n_k}$. Mudar a enumeração muda o resultado a não ser que a série seja absolutamente convergente.

Teorema de Riemann: Se a_n converge condicionalmente se pode fazer um rearranjo para levar a convergência para qq valor que se queira (incluindo $\pm\infty$).

4.3 Séries Divergentes

Há séries divergente que fazem sentido. Por exemplo a série 1+-1+1+-1.., ou $a_n = (-1)^n$, não é convergente, já que sua soma teima em oscilar entre 0 e 1. Mas é 'natural' associar à sequência de somas parciais, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = 1, 0, 1, 0, ...$ o seu valor médio, e considerar $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \approx \frac{1}{2}$. Qual o sentido dessa definição? Essa questão é importante tanto do ponto de vista matemático, como para aplicações em Física. Não é raro a descrição que fazemos de um fenômeno levar grandezas físicas expressas como somas infinitas, e por vezes, divergentes.

A ideia pode ser formalizada definindo-se um funcional linear da série: $\Sigma : \{a_n\} \longrightarrow a$. Um funcional é uma aplicação que leva a série inteira (a ∞-tupla a_n e não sua soma, que pode nem estar definida) a um número real, $s = \Sigma[a_n]$. Assim, deve existir um funcional definido sobre uma

classe suficientemente grande de séries, tal que $\frac{1}{2} = \Sigma[(-1)^{n+1}]$. Há diversas estratégias para definir um resultado finito a partir de séries cujas somas, no sentido usual de convergência de séries, podem ser divergentes. Se exigem dos funcionais basicamente as propriedades:
1) **Linearidade** $\Sigma[ca_n + b_n] = c\Sigma[a_n] + \Sigma[b_n]$.
2) **Regularidade**, isto é, compatibilidade com séries convergentes, $s_n \longrightarrow s$ (finito) $\rightarrow \Sigma[a_n] = s$. Por exemplo, $\Sigma[2^{-n}] = 2$, já que $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$. Se permitimos que s apresente também os valores $\pm\infty$, isto é, se a série converge para $\pm\infty$ a soma também for $\pm\infty$, o método se torna "totalmente regular". Perde-se assim a capacidade, importante, de definir um número finito como resultado de séries que divergem para $\pm\infty$.

3) Também é desejável que o reordenamento dos primeiros N termos não mude o resultado da soma, chamada de **estabilidade**. Alguns métodos importantes falham nesse aspecto.

Há vários métodos de soma, nem sempre compatíveis uns com os outros.

Exemplos de métodos de soma:

I) **Somas de Cesàro-Holder**- e em geral somas de Nörlund. Trata-se de generalização da ideia simples de fazer médias sobre as somas parciais. Vamos partir da sequência de somas parciais $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Defina a média sobre essas sequências $H_N^1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i$. Se o limite $N \longrightarrow \infty$ existe, ele é definido como a soma de Cesàro de "ordem"1, que coincide com soma de Holder de ordem 1, $\lim_{N\longrightarrow\infty} H_N^1 = C_1[a_n] = \sum a_n$ (C,1) $= \sum a_n$ (H,1). Se não existe esse limite, tome H_i^1 no lugar de s_i para definir a soma de Holder ordem dois $H_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H_i^1$. Se o limite agora existe, define-se essa como a soma de ordem 2 da série, $\lim_{N\longrightarrow\infty} H_N^2 = H_2[a_n] = \sum a_n$ (H,2). Se esse limite não existe se prossegue indefinidamente na esperança de alguma soma, em alguma ordem de iteração, ser convergente. Se a soma de ordem K é convergente, as de ordem superior também serão. Assim $1 - 1 + 1 - 1 + 1...$ é definida como $\frac{1}{2}$ já em primeira ordem. Já $1 - 2 + 3 - 4 + ...$ é definida como $\frac{1}{4}$ em segunda ordem. A soma de Cesàro é definida analogamente, com a diferença que não se fazem as divisões por N nas etapas intermediárias e no final, em ordem k, se divide a soma das somas por $\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$. Pode-se generalizar as somas de Cesàro para ordens fracionárias.
Verifique esses dois casos de definições finitas para séries divergentes, $1 - 1 + 1 - 1 + 1... = \frac{1}{2}$ *e* $1 - 2 + 3 - 4 + ... = \frac{1}{4}$
A soma de Cesàro é caso particular das somas de Nörlund, definidas a partir de números não negativos arbitrários ($p_n \geq 0, p_0 > 0$), $t_m = \frac{\sum_{k=0}^{m} s_k p_{m-k}}{\sum_{k=0}^{m} p_{m-k}}$. Com a condição, $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{p_n}{\sum^n p_k} \longrightarrow 0$, satisfeita pela soma de Cesàro, **as somas de Nörlund são regulares**, ou seja, compatíveis com o resultado de somas convergentes. Além disso, distintas somas de Nörlund são consistentes entre si! Significando que se diferentes somas tornam uma série finita, aos resultados atribuídos à soma são os mesmos. Essas somas são boas para dar um significado finito para diversas somas alternadas não convergentes. Mas falham para séries positivo-definidas, como $\sum 1$. Outro aspecto interessante é que a **diluição de séries** pode levar a resultados distintos: $1 - 1 + 1 - 1 + ... = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 + ... = \frac{1}{2}$ (C,1); porém $1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + ... = \frac{1}{3}$ (C,1).

II) Médias abelianas. Parte-se de $\lambda_n > \lambda_{n-1}$, com $\lambda_0 \geq 0$. Toma-se, para cada série $[a_n]$,

$$f(x) = \sum a_n e^{-\lambda_n x}.$$

Se

$$f(x)_{x\longrightarrow 0} \longrightarrow s,$$

s é definida como a soma de Abel da série, para a escolha de λ,s apresentada, $s = \sum a_n \ \ (A, \lambda)$. Esse método é regular. Porém, diferentes escolhas de λ's levam a distintos resultados. Por exemplo, $a_n = (-1)^n$ apresenta somas iguais a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ se escolhemos $\lambda_N = n$ e $\lambda_n = 0, 1, 3, 4, 6, 7, ..$ respectivamente. Caso importante matematicamente: Mitagg-Leffler: $\lambda_n = n \ln n$.
As médias abelianas são mais fortes que as de Cesàro: toda série somável por Cesàro também é por soma Abeliana, mas não vice-versa.

III) Média de Borel.

Tata-se de um método que utiliza uma função inteira (não tem polos no plano finito) $J(x) = \sum p_n x^n$. A soma é definida, se existir o limite quando $x \longrightarrow \infty$, de

$$\frac{\sum p_n s_n x^n}{\sum p_n x^n} \longrightarrow s.$$

O caso mais interessante é quando $J(x) = e^x = \sum \frac{1}{n!} x^n$. A soma de Borel é então definida pelo limite

$$e^{-x} \sum s_n \frac{x^n}{n!} \longrightarrow s.$$

A média de Borel é regular.

Princípio da potência da soma: métodos distintos podem ter potências distintas. Um método é potente se ele consegue tornar finita uma soma rapidamente divergente. Assim, Borel é mais potente que soma abeliana e essa que soma de Cesàro. Quanto mais rapidamente decrescerem os coeficientes p_n, mais potente é soma de Borel, conseguindo somar séries altamente divergentes. Mas o preço é que somas fracamente divergentes podem se tornar não somáveis quando se aumenta a potência do método.

IV) **Soma de Euler-Maclaurin**

O método de soma se baseia na expressão, válida para uma classe de funções,

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) \approx [\int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2} f(n) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{B_r}{(2r)!} f^{(2r-1)}(n)] + C.$$

Aqui, estão presentes os números de Bernoulli, B_r, e as derivadas de ordem $2r-1$ da função f. O número C é chamado de **constante de Euler-Maclaurin da função f(x)**. Ele é definido a partir de $f(x)$ e do ponto inicial 'a'. Se a série for convergente, todos os termos entre chaves vão a zero no limite $n \longrightarrow \infty$, e a constante C corresponde à soma do lado esquerdo. A ideia é atribuir o valor C, a parte 'finita' do lado direito da expressão, à soma da séria divergente do lado esquerdo, e há prescrições para o cálculo de C a partir da função f(x). O valor de C é chamado de **soma de Ramanujan** da série.

Um caso importante é $f(x) = x^{-s}$. A soma, $\sum_n n^{-s} \equiv \zeta(s)$, leva a representações analíticas da função $\zeta(s)$ a **zeta de Riemann**. Assim, segundo somas de Ramanujan:
1) $\sum_1^n 1 \quad - n - \frac{1}{2} \longrightarrow \zeta(0) \rightarrow 1 + 1 + 1 + ... = -\frac{1}{2} = \zeta(0)$.
2) $\sum_1^n n \quad - \frac{1}{2} n(n-1) - \frac{1}{12} \longrightarrow \zeta(-1) \rightarrow 1 + 2 + 3 + .. = -\frac{1}{12} = \zeta(-1)$

Manipulações: Pode-se concluir que
$2 + 4 + 6 + .. = 2(1 + 2 + 3 + ...) = 2\frac{-1}{12} = -\frac{1}{6}$
$1 + 3 + 5 + .. = 2 + 4 + 6 + .. - (1 + 1 + 1 + ..) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
De fato os números de Euler-Maclaurin, C, associados às funções $f(x) = 2x$ e $f(x) = 2x - 1$ são $-\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$.
Porém
$1 \pm 2 + 3 \pm 4 + .. \neq (1 + 3 + 5 + ..) \pm (2 + 4 + 6) = \frac{1}{3} \mp \frac{1}{6}$.
Vale sim
$1 \pm 2 + 3 \pm 4 + .. = (1 + 0 + 3 + 0 + 5 + ..) \pm (0 + 2 + 0 + 4 + 0 + 6)$.
Essas últimas somas se representam como $(1 + 0 + 3 + 0 + 5 + ..) = (1 - 2^{-s})\zeta(s)|_{s=-1} = \frac{1}{12}$ e
$0 + 2 + 0 + 4 + 0 + 6 = 2^{-s}\zeta(s)|_{s=-1} = -\frac{1}{6}$
Em outras palavras as somas de Ramanujam, e a representação em termos de funções Zeta, não é invariante sob uma diluição simples das séries:
$1 + 3 + 5 + 7 \neq 1 + 0 + 3 + 0 + 5 + 0 + 7 + ...$ Observação: as somas tipo Holder parecem ser invariantes sob essas transformações. Mas essas somas à Holder não dão um resultado finito para as séries positivas aqui consideradas.

Aplicações físicas: 1) Considere um sistema com N osciladores quânticos distintos. Suas frequências angulares são definidas como $w_n = nw_0$, $n = 1, 2, 3...N$. A energia do estado fundamental desse sistema, em unidades de $\frac{1}{2}\hbar w_0$, será $E_0 = \sum_{n=1}^{N} n$. Essa energia será infinita, se $N \longrightarrow \infty$. Porém, se a energia tem sua expressão regularizada de acordo com $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, e é então somada para s suficientemente grande e depois tem seu valor reobtido tomando-se o limite $s \longrightarrow -1$, se obtém uma energia finita $-\frac{1}{12}$. Um procedimento exatamente análogo a esse ocorre na corda quântica bosônica. E é esse valor da soma que permite tratar a corda bosônica como sendo livre de anomalias em D=26 dimensões. Como resultado, se conseguem massas das partículas associadas aos operadores quânticos tendo valores múltiplos de uma massa padrão (exceto por um número finito de modos de massa negativas, além dos desejados modos de massa nula, associados aos fótons ou gravitons) .

2) Considere campo de Dirac em D=1+1 na presença de um campo escalar estático da forma $\phi_c = \tan \lambda x$. O operador de número fermiônico para o campo de Dirac quantizado tem a forma, $N = \int dx J_0 = \int \frac{1}{2}[\psi^\dagger\psi - \psi\psi^\dagger]$. Devido ao caráter topológico do campo escalar a expansão em soma de momentos do campo de Dirac apresenta pares de modos com momentos $k_p = \hbar\frac{2p+1}{L}$ e um único modo zero com momento nulo. Os modos com momentos não nulos contribuem em pares de sinais opostos. Quanto vale a soma desse modos normais? Ela pode ser tomada simetricamente: $N_N = \frac{1}{4}[1 - 1 + 1 - 1..] + \frac{1}{4}[-1 + 1 - 1 + 1..] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Assim o operador de número se torna $N = N_0 = \frac{1}{2}$ levando ao celebrado fracionamento da carga fermiônica em pano-de-fundo topológico, Jackiw and Rebbi, Phys Rev 1976.

Capítulo 5

Continuidade - Limites - Diferenciabilidade

5.1 Limite e continuidade

Visão geral- Conceitos próximos de proximidade

1) **Pto de acumulação:** a é pto de acumulação de um conjunto X se $\forall \delta > 0, \text{dBol}(a, \delta) \cap X \neq \emptyset$. Lembrando que a bola deletada é definida por $\text{dBol}(a, \delta) \equiv (a - \delta, a + \delta) \backslash \{a\}$. Assim existe elemento de X na bola deletada não importando quanto pequeno seja o raio ϵ. Obs: Deletada é importante! O ponto 'a' pode ou não pertencer a X. Notação para o conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto X: X'.

Casos especiais: Ponto de acumulação à esquerda e à direita: Impor, para $x \in \text{dBol}(a, \delta) \wedge x < a$, ou x>a.

2) **Limite** Limite é definido em pontos de acumulação, a, do domínio da função. Existe limite da função no ponto a se $\exists L, \forall \epsilon, \exists \delta | f(\text{dBol}(a, \delta) \cap X) \subset \text{Bol}(L, \epsilon)$.
Limite à esquerda ou à direita: $\lim_{x \longrightarrow a^{\pm}} = L \leftrightarrow \forall \epsilon \exists \delta, f(\text{dBol}^{\pm}(a, \delta) \cap X) \subset \text{Bol}(L, \epsilon)$. Notação $\lim_{x \longrightarrow a^+} = \lim_{x \downarrow a}$ e $\lim_{x \longrightarrow a^-} = \lim_{x \uparrow a}$. Obs: Definição de $\text{dBol}^{\pm}$ clara pela notação?

Obs: $\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = L \rightarrow \lim_{x \longrightarrow a} = L$. O reverso também vale desde que seja em ponto de acumulação à esquerda e à direita.

Obs: **Não figura $f(a)$ na definição**. $f(a)$ nem precisa existir.
Por exemplo, $f_1(x) = \sin \frac{1}{x}$ e $f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Somente existe limite para $x \longrightarrow 0$ no segundo caso.

Teorema: Se limite existe em x=a então $f(\text{dBol}(a, \delta))$ é limitado para algum δ.
Demo: $|f(x)| = |f(x) + L - L| \leq |f(x) - L| + |L| < \epsilon + L$

Teorema: $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = L$, para toda sequência $x_n \in X - \{a\}$, convergente para a ($x_n \longrightarrow a$).
Demo 1) Se limite da função existe, se pode restringir $x_n \in dBol(a, \delta)$ e isso garante que $f(x_n) \longrightarrow L$ 2) Se Toda seq. é convergente e a função não tiver limite: pode-se escolher $x_n \in dBol(a, \frac{1}{n}) \cap X$ tal que $|f(x_n) - L| \geq \epsilon > 0$. Como $n \longrightarrow a$, fica demonstrado que f tem limite por contraposição.

3) **Continuidade**

A função é contínua em x=a se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta | f(\text{Bol}(a, \delta) \cap X) \subset \text{Bol}(f(a), \epsilon)$.

Note que não se usa bola deletada e que entra o valor da função em x=a. O ponto x=a não precisa também ser ponto de acumulação. **Uma função é contínua em pontos isolados do domínio**.

Obs: **Continuidade em pontos de acumulação $\rightarrow$ existe limite, mas não o reverso.**

3.1) **Continuidade uniforme** em $I \subset X$ se $\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta | f(\text{Bol}(a,\delta) \cap X) \subset \text{Bol}(f(a),\epsilon)$. É um requerimento bem mais forte!

Teorema: Se f e g são contínuas, f+g, cf, fg e $\frac{f}{g}$(onde $g(x) \neq 0$), são contínuas.

Demo: similares às de sequências

Teorema: Funções compostas de funções contínuas são contínuas.

Demo: $f : X \longrightarrow R$ *e* $g : Y \longrightarrow R$ *e* $f(X) \subset Y$. *Tomando qq sequência* $x_n \longrightarrow a$, *então* $y_n \equiv f(x_n) \longrightarrow b = f(a)$. *Então* $g(y_n) \longrightarrow c = g(b)$. *Assim* $g(f(x_n)) \longrightarrow c = g(f(a))$. *Toda seq convergente tem imagem convergente.*

Teorema: Toda função contínua em um ponto é limitada em alguma vizinhança do ponto: $\exists \delta, M | f(\text{Bol}(a,\delta)) \subset \text{Bol}(0,M)$. Isto é $|f(x) < M$.

Demo: Continuidade→ existe limite→ Limitação

4) **Descontinuidades**

Ponto de Descontinuidade: Função não contínua em ponto de seu domínio 'a' → 'a' é ponto de descontinuidade.

Classificação: Primeira espécie: Existem $f(a^{\pm})$ mas que diferem entre sí ou diferem de $f(a)$. Significa salto da função em $x = a$.

Segunda espécie: Não existe (pelo menos) um dos limites laterais.

Exemplos: Função de Dirichlet: $f_D(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se x for racional} \\ 0, & \textit{se x for irracional} \end{cases}$, é descontínua de segunda espécie em todos os pontos. Já $x f_D(x)$ é contínua somente em $x = 0$.

Teorema: Funções Monótonas: Não admitem descontinuidade de segunda espécie:

$\sup(\{f(x)|x < a\}) = f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+) = \inf(\{f(x)|x > a\})$.

obs: $f(a^{\pm})$ corresponde aos limites laterais.

Demo: Basta mostrar que existem ambos limites laterais. Considerando o caso especial de função crescente, tome o limite à esquerda, e defina $L^- = \sup(\{f(x)|x \in X \wedge x < a\})$. *Sempre existe* $x_0 < a$ *tal que* $f(x_0)$ *seja tão próximo de* L^- *quanto se queira. Então para todo* $x \in dBol^-(a, a-x_0)$, *f(x) é tão próximo de* L^- *quanto se queira,* $L^- = f(a^-)$. *Analogamente para limite à direita.*

Teorema: pontos de descontinuidade de funções monótonas formam conjunto finito ou enumerável.

Demo: Basta tomar um número racional $r(x)$, *tal que entre* $f(x^-) < r(x) < f(x^+)$. *Temos então uma função injetiva do conjunto dos pontos de descontinuidade de f ao conjunto dos racionais. Usamos que* $f(x_1^+) \leq f(x_2^-)$, *para* $x_1 < x_2$.

x_0 é ponto de **descontinuidade isolado** se $\exists \delta$ tal que f é contínua em $\text{dBol}(x_0, \delta)$.

Uma função monótona não necessita ter pontos de descontinuidade isolados! *Exemplo: Seja* $p_n = \frac{1}{n^2}$, *(ou qq outra série positiva e convergente). Seja* a_n *uma enumeração dos racionais.*

$h(x) \equiv \begin{cases} 0, & \textit{se x<0} \\ \sum p_n, & \textit{sobre todos os pontos } a_n \textit{ com } 0 \leq a_n \leq x \end{cases}$. *Então* $h(x)$ *é descontínua em todos o racionais positivos, monotônica e contínua nos reais!. Obs:* $f(x^-) = f(x)$.

5.2 Intervalos - Conjuntos fechados, abertos, compactos

1) **Conjunto fechado**: É o que contém todos os seus pontos de acumulação, C é aberto se $C' \subset C$. Oposto de fechado= conjunto não fechado.

Obs: Pontos isolados podem pertencer a conjuntos fechados. Isso sugere o refinamento: 1.1) **Conjunto perfeito**: É fechado e todos os pontos dele são pontos de acumulação.

2) **Conjunto aberto**: É o para o qual todos os seus pontos são pontos interiores.

Ponto interior de um conjunto: 'a' é interior a 'A' se $\exists\delta|$dBol$(a,\delta)\subset A$. Oposto de conjunto aberto: conjunto não aberto. it Exemplos: conjunto dos reais é aberto e fechado. O intervalo $(1,2]$ não é aberto nem fechado. O conjunto dos racionais não é aberto nem fechado. O conjunto dos naturais é fechado mas não aberto.

3) Vizinhança de um ponto: Intervalo aberto que contém o ponto. Por ex. Bol(a,δ).

Aderência ou fecho de um conjunto A: $\bar{A}=A\cup A'$. Interpretação: É a interseção de todos o conjuntos fechados que contem A.

Interior de um conjunto: É o conjunto de todos os pontos interiores. Interpretação: É a união de todos os conjuntos abertos contidos no conjunto.

4) Teoremas

1) Seja o conjunto 'universo' dos reais. Então A é aberto $\leftrightarrow$ A^c é fechado.

Demo: 1) Seja A aberto e seja x ponto de acumulação de A^c. Então $\forall\epsilon, dBol(x,\epsilon)\cap A^c\neq\emptyset$, ou seja $x\notin A$, e daí $x\in A^c$. Portanto A^c é fechado. 2) Seja A^c fechado. Então $x\in A\rightarrow x$ não ser ponto de acumulação de A^c. Daí existe $Bol(x,\epsilon)\subset A$. x é interior a A.

2) A_α abertos $\rightarrow\cup_\alpha A_\alpha$ é aberto. Obs: Coleção arbitrária, enumerável ou não.

Demo. $x\in\cup_\alpha A_\alpha\rightarrow x\in A_\beta$, para algum β. Vizinhança contida em A_β está necessariamente contida em $\cup_\alpha A_\alpha$

3) A_α abertos $\rightarrow\cap_{i=1}^N A_i$ é aberto. Obs: Coleção finita.

Contra-exemplo $A_n\equiv(0,2+\frac{1}{n})\cup(1-\frac{1}{n},3)$

4) $\cup_\alpha A_\alpha=(\cap_\alpha A_\alpha^c)^c$ e vice-versa $\cap_\alpha A_\alpha=(\cup_\alpha A_\alpha^c)^c$. Corolário: Versões para conjuntos fechados de 2 e 3, trocando $\cup$ por $\cap$.

5) **Conjunto limitado** $\exists M||x|\leq M$.

Cobertura de um conjunto Sejam abertos A_α e $\cup_\alpha A_\alpha\supset X$. $\{A_\alpha\}$ é cobertura de X.

Conjunto compacto É o conjunto para o qual toda cobertura tenha sub-cobertura finita.

Exemplo: $A_n=(-n,n)$ é cobertura dos reais, que não é compacto. $A_n=(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})$ é cobertura de $(0,1)$, que não é compacto, mas $A_n=(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})$ é cobertura de $[0,1]$, que é compacto.

Teorema: Conjunto é compacto se somente se é fechado e limitado.*Demonstração um tanto longa. Válido para conjunto universo dos reais.*

Teorema: Conjunto é compacto se e somente se todo subconjunto infinito contém algum ponto limite.

Obs: De um ponto de vista mais geral, ser fechado ou ser aberto depende do conjunto 'universo' ao qual se refere. Mas ser compacto não depende. É uma propriedade mais intrínseca ao conjunto.
Obs: $A\subset Y\subset X$ pode ser aberto em relação a X mas não ser em relação a Y.

Se $U=R^+$, o intervalo $(0,2]$ é fechado, mas não é compacto. Se $U=[0,\infty)$, o intervalo $[0,2)$ é aberto, mas $[0,2]$ é fechado e compacto.

Teorema: Uma função contínua num intervalo I compacto é limitada.

Demo: Supor f não limitada. Construa então $x_n\in I|f(x_n)>n$. como x_n é limitado possui subsequência convergente em X, $x_n\longrightarrow a$. Mas se pode então construir sequência $f(x_{n_k})$ que cresce indefinidamente e portanto não há limite, contradizendo f ser contínua.

Teorema de Weierstrass. Se f é contínua em intervalo compacto então existem máximo e mínimo de f(x) no intervalo, $\exists a,b|f(a)\leq f(x)\leq f(b)$.

Demo: I compacto $\rightarrow$ Existem supremo e ínfimo. f contínua $\rightarrow$ supremo é máximo e ínfimo é mínimo.

Teorema do valor intermediário. Se f é contínua num intervalo compacto e os valores da função nos dois pontos extremos do intervalo são distintos então existe ponto no intervalo aberto para o qual a função assume qualquer dos valores intermediários.

Demo: Suponha $a, b \in I, a < b$ e $f(a) < f(b)$. Para $y | f(a) < y < f(b)$, defina $S = \{x \in [a,b] | f(x) < y\}$. Seja $s = \sup(S)$. Considere $\underline{x}_n \in S | \underline{x}_n \longrightarrow s$. Então $f(\underline{x}_n) \longrightarrow f(s)$ e $f(s) \leq y$. Por outro lado $\overline{x}_n \doteq s + \frac{1}{n}$ é tal que $f(\overline{x}_n) > y$, ou s não seria o supremo. Daí $f(\overline{x}_n) \longrightarrow f(s) \geq y$. Portanto $f(s) = y$

Teorema: Se I é compacto a continuidade de uma função leva à continuidade uniforme dela.

Demo: Supor f não unif cont. em intervalo compacto $I \; \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in I || x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. A ideia é construir sequências com $|x_n - y_n| \longrightarrow 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Como I é compacto existem subsequências convergentes. Essas subsequências convergentes teriam imagens não convergentes, levando a contradição com a convergência simples.

Importância convergência uniforme: Garantir integral de Riemann. Obs: não necessário para outras definições de integral.

Teorema: Função contínua se e somente se toda imagem inversa de conjunto aberto for aberto.*Demo longa.*

Teorema: função contínua leva conjunto compacto em conjunto compacto.

Demo-rascunho: Tomar cobertura de f(I). Imagens inversas dos conjunto são cobertura de I. Existe subcobertura finita de I. Imagens dessas subcoberturas finitas formam subcobertura finita de f(I)

5.3 Diferenciabilidade

Definição $\frac{df}{dx} \doteq \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} == \doteq f'(a)$, se o limite existir.

Dái: É necessário que 'a', além de pertencer ao domínio, seja um seu ponto de acumulação. Pode-se também exigir que a função seja definida num intervalo e a derivada a ser definida em pontos do intervalo fechado ou interiores ao intervalo aberto. Pode-se definir derivadas à esquerda ou à direita.

Teorema: Diferenciabilidade $\rightarrow$ continuidade.

Demo: $\lim(f(a+h) - f(a)) = \lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h = f'(a) \lim h = 0$.

Exemplo f contínua em $[a, b]$ e não diferenciável (Weierstrass). $f(x) = \sum_n b^n \cos(a^n \pi x)$, com b=num ímpar e $0 < a < 1$ tal que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Obs: busca por função com essa propriedade levou a descoberta dos fractais.

Teoremas do valor médio:

1) Se f é diferenciável em (a, b) e f é máximo (mínimo) em um ponto x, $a < x < b$ então $f'(x) = 0$

Demo (máximo): $\exists Bol(x, \delta) | x \in Bol(x, \delta) \rightarrow f(x') \leq f(x)$. Então tomando limites à esquerda e à direita se encontra $f'(x)$ com sinais opostos, e portanto nula.

2) Teorema de Rolle. Se f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então $f'(x) = 0$ em algum $x \in (a, b)$.

Demo: Continuidade em $[a, b] \rightarrow$ existência de máximo e mínimo. Em dos dois $\in (a, b)$

3) Teorema do valor médio: f contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $(a, b) \rightarrow \exists c \in (a, b) | f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demo: Basta considerar o caso anterior para $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. *Obs: Não requer* f' *contínua.*

Corolários: 1) $f'((a,b)) = \{0\} \to f((a,b))$ é um singleton.
2) $(\forall x \in (a,b), f'(x) = g'(x)) \to f(x) = g(x) + c$
3) $(\forall x \in (a,b), f'(x) > 0) \to$ f é estritamente crescente.

Contra exemplo: $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$.

Então $f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 (\textit{ oscila loucamente}) \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

f não é crescente em nenhum intervalo em torno de x=0.

Teorema de Darboux: f diferenciável em $[a,b]$ e r tal que $f'(a) < r < f'(b)$. Então $f'(c) = r$ em algum $c \in (a,b)$. *Em outras palavras, a função derivada satisfaz o valor médio, mesmo que não seja contínua.*

Demo: considerar $g(x) = f(x) - rx$. *Então g tem máximo ou mínimo em* (a,b) *e portanto* $g'(c) = 0$.

Teorema: Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$ então a é máximo local.

5.4 Exercícios

1) Considere os seguintes subconjuntos dos reais.

a) $\{x||x| \leq 1\}$. b) $\{x||x| < 1\}$. c) $\{x||x| \leq 1 \wedge x \neq 0\}$. d) Um conjunto qq finito. e) $\mathcal{Z}$. f) $\{x|x = \frac{1}{n}\}$, n=1, 2, 3, 4... . g) $(0,1)$, g1) com $U = R^+$ e g2) com $U = R$, g3) e g4): Acrescentar $x \neq \frac{1}{2}$. h) $(0,1]$, h1) com $U = R^+$ e h2) com $U = R$, h3 e h4): acrescentar $x \neq \frac{1}{2}$.

Encontre X' para cada X. Classifique X quanto a aberto, fechado, perfeito, limitado, compacto.

2) Estudar o exemplo: Seja $p_n = \frac{1}{n^2}$, (ou qq outra série positiva e convergente). Seja a_n uma enumeração dos racionais.

$h(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se x<0} \\ \sum p_n, & \text{sobre todos os pontos } a_n \text{ com } 0 \leq a_n \leq x \end{cases}$. Então $h(x)$ é descontínua em todos o racionais positivos, monotônica e contínua nos reais!. Obs: $f(x^-) = f(x)$. Ela é diferenciável? Veremos que ela é integrável.

3) Discutir brevemente $f(x) = \sum_1^\infty \frac{f(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}$ onde f é a função dente de serra, $f(x) = |x|$ em $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, estendida periodicamente: f é contínua em todos os pontos, não monotônica em nenhum ponto e não diferenciável em nenhum ponto. Discutir caso f descrevendo posição da partícula no tempo.

4) Discutir: A expressão qual o estado de movimento de uma partícula em um determinado instante? Se mov para frente, para trás, está parada. Tome por exemplo $v_{\text{inst}}(t=0) > 0$. Contraste com o exemplo: $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$.

Então $f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 (\text{ oscila loucamente}) \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

f não é crescente em nenhum intervalo em torno de x=0.
Se for acrescentada a informação que a aceleração em t=0 é negativa, muda alguma coisa?

Nivaldo: 5.21; 5.19; 5.26.

Capítulo 6

Integrais

Conceito de Integral de Riemann desenvolvido antes que conceitos mais modernos: Lebesgue e Henstock-Kurzweil(Riemann generalizado).

6.1 Definição

1) **Partição de um intervalo fechado**-*Notação um pouco diferente que Nivaldo.*
Dado $I = [a, b]$, uma sua partição é conjunto finito de intervalos fechados, não degenerados (tem ponto interior) $P[I] = \{I_i = [x_{i-1}, x_i]\}$, com $x_{i+1} > x_i$, sem superposição(=no máximo um ponto extremal em comum) tal que $x_0 = a$, $x_n = b$ e $\cup_i I_i = [a, b]$.
Para integral de Rieman é necessário mais: partição **segregada**(tagged partition): $sP[I] \doteq \{(I_i, t_i)\}$, onde a cada I_i está associado um ponto $t_i \in I_i$.
Obs: A 'partição', entendida como conjunto dos pontos **extremos** dos intervalos componentes de P, vou chamar de $eP \equiv \{x_i | x_0 = a, x_n = b, x_{i+1} > x_i\}$.
Norma de um intervalo: $||I_i|| = |x_i - x_{i-1}|$. Norma de Riemann da partição: $||P|| = \max ||I_i|| = \max |x_i - x_{i-1}|$.
Soma de Riemann:Definida para uma partição segregada: $S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)||I_i||$

2) **Integral de Riemann**:
$\int f(x)dx = \lim_{||P|| \longrightarrow 0} S(P, f)$. Em outras palavras: Dado f(x) com domínio contendo I=[a,b], $\exists A, \forall\epsilon > 0, \exists\delta, \forall sP[I], ||P|| < \delta \to |S(P, f) - A| < \epsilon$

Obs: O limite é uniforme nas normas componentes, já que $||sP|| < \delta \leftrightarrow \forall I_i, ||I_i| < \delta$, e nos pontos segregados t_i, já que se exige que a limitação ($< \epsilon$) valha para qq segregação. **Requerimento muito forte!**
Alternativa Darboux: Supondo $f(x)$ limitadas em I e dada partição P
$M_i = \sup f(I_i)$ e $m_i = \inf f(I_i)$. $\overline{\int_a^b} = \inf \overline{S}(P, f)$, com $\overline{S}(p, f)$ o mesmo que $S(P, f)$ mas tomando $f(t_i) \longrightarrow M_i$ e analogamente para $\underline{\int_a^b} = \sup \underline{S}(P, f)$, com $f(t_i) \longrightarrow m_i$. O supremo e o ínfimo são tomados em respeito a todas a partições. Pode ser entendida como uma quasi-segregação especial: Se os supremos e ínfimos forem máximos e mínimos será segregação feita com os pontos de máximo e mínimo. A integral de Riemann pode ser alternativamente expressa pelo valor dos limites **na condição de igualdade dos limites das somas superior e inferior**.

Obs: Definindo $m = \inf f([a, b])$ e $M = \sup f([a, b])$ temos

$m||I|| \leq \underline{S}(P,f) \leq \overline{S}(P,f) \leq M||I||$

Refinamento de uma partição: P^* é refinamento se $eP^* \supset eP$. Refinamento comum a duas partições: $eP \doteq eP_1 \cup eP_2 \rightarrow P \doteq P_1 \cup P_2$.

Lema: $\underline{S}(P^*,f) \geq \underline{S}(P,f)$ e $\overline{S}(P^*,f) \leq \overline{S}(P,f)$

Teorema: Dadas duas partições do mesmo intervalo P_1 e P_2 então $\underline{S}(P_1,f) \leq \overline{S}(P_2,f)$

Demo: Basta tomar $eP = eP_1 \cap eP_2$, de maneira que tanto P_1 como P_2 são refinamentos de P e usar P como ponte para relacionar as somas.

Critério de Riemann para integrabilidade:

Integrabilidade $\leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0, \exists P, |\overline{S}(P,f) - \underline{S}(P,f)| < \epsilon$.

Teorema: **Integral de Darboux equivale a integral de Riemann**.

3) **Propriedades**;

Teorema: **Continuidade em intervalo finito I garante integrabilidade.**

Demo: Continuidade $\rightarrow$ Continuidade uniforme $\rightarrow \quad \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0||x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2|I|}$. Escolhendo $|P| < \delta$ tem-se $M_i - m_i \leq \frac{\epsilon}{2|I|}$ de modo que a soma das diferenças é majorada por $\frac{\epsilon}{2|I|}\sum|I_i| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, aproximando as somas superior e inferior tanto quanto queira.

Obs: Não é necessário. Um conjunto finito de descontinuidades de primeira espécie permite integração.

Teorema: **Se uma função é monotônica em um intervalo fechado, então ela é integrável nesse intervalo**.

Demo: Seja $I = [a,b]$ e tome a partição com $|I_i| = |b-a|/n$. Como $m_i = f(x_{i-1}^+) \geq f(x_{i-1})$ e $M_i = f(x_i^-) \leq f(x_i)$, temos que $\overline{S} - \underline{S} \leq \frac{b-a}{n}\sum(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{b-a}{n}$. Basta tomar n grande o suficiente para garantir a igualdade das somas. Interpretação alternativa: o conjunto das descontinuidades é enumerável e pode ser 'cercado' para contribuir infinitesalmente.

Propriedades básicas das integrais para funções integráveis f e g no intervalo compacto I: $\int(f+g) = \int f + \int g$; $\int cf = c\int f$; $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ e fg é integrável, mas $\int fg \neq (\int f)(\int g)$, em geral.

Integrais impróprias: Definidas por limites. Há o caso $x \longrightarrow \infty$ e o caso de descontinuidade de segunda espécie, ex $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

6.2 Antiderivada - Teoremas fundamentais do cálculo- Teorema valor médio

Primitiva de uma função f: Se $G' = f$ então G é primitiva de f. Conceito pode ser adaptado e um subdomínio de f e à permissão de um conjunto de pontos excepcionais onde não vale a relação. É importante os casos em que o conjunto de pontos excepcionais seja finito, enumerável ou um conjunto não enumerável de 'medida' nula- a ser definido posteriormente.

Primeiro teorema: Se f é integrável no intervalo compacto $I = [a,b]$ define-se $F(x) = \int_a^x f(x)dx$. Então

1) $F(x)$ é contínua em I

2) F é primitiva de f, nos pontos de continuidade de f.

Demo: 1) Estamos supondo integral definida no intervalo e não integral imprópria, $|f(x)| \leq M$, $|F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq M|y-x|$. Daí F é contínua. ($\delta < \frac{\epsilon}{M}$). 2) $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ para $|t-x| < \delta$. Escolhendo $|h| < \delta$ na expressão da derivada de F se obtém $F' = f$, já que

$\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - \frac{hf(c)}{h}| = |\frac{1}{h}\int [f(t)-f(c)]dt| < \frac{\epsilon|h|}{|h|}|$.

Segundo teorema: Se f é integrável no intervalo compacto I e f tem primitiva G então $\int_a^b f = \Delta G$.

Segundo teorema-B- caso particular: Se f é contínua no intervalo compacto I e f tem primitiva G então $\int_a^b f = \Delta G$.

Demo: Considere uma partição de $I = [a,b]$ *de tal modo que* $\overline{S} - \underline{S} < \epsilon$. *Como G é derivável, é contínua, e portanto* $G(x_i) - G(x_{i-1}) = |I_i| f(t_i)$, *para algum* $t_i \in I_i$. *Daí* $\sum f(t_i)\Delta x_i = G(b) - G(a)$. *Daí se obtém* $|G(b) - G(a) - \int f| < \epsilon$.

Contra-exemplo: função integrável mas descontínua num conjunto denso de pontos a_n: *Considere a função que definimos anteriormente:* $f(x) = \sum_{n|a_n<x} \frac{1}{n^2}$. *Essa função é contínua para* $x \neq a_n | \forall n$ *e tem descontinuidade* $= \frac{1}{n^2}$ *para* $x = a_n$. *Além disso é uma função crescente, e portanto integrável. Se* a_n *for denso num intervalo, não há qualquer sub-intervalo em que* $f(x)$ *seja contínuo.*

Teorema do valor médio: Se f é contínua em [a,b], g é integrável e não muda de sinal, então $\int_a^b fgdx = f(c)\int_a^b gdx$, para alguma $c \in [a,b]$. Obs: $g = 1$ é caso particular.

Demo: padrão

6.3 Fórmula de Taylor

Funções de classe C^n: derivadas até ordem n existem e são contínuas. Método básico para obter Taylor: int por partes. f $C^1 \rightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x f'dt$. f C^2 permite iterar $\int^x f'dt = -\int f'(t)\frac{d}{dt}(x-t)dt = f'(a) + \int^x (x-t)f''(t)dt$. Daí se obtém:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} f'^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_N(x)$$

com $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{n+1}(t)dt$.

Convergência para f(x) $\leftrightarrow$ resto vai a zero.

Forma de Lagrange para o resto, via teorema do valor médio para $g(t) = (x-t)$, $R_n(x) = f'^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.Todas as derivadas da exponencial se anulam

Contra exemplo: Seja $f(x) = P_N(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$. *Em* $x = 0$ *substitua a exponencial por 0. Como a exponencial tem todas as derivadas nulas em* $x = 0$ *a série de Taylor de* $f(x)$, *é convergente, e reproduz* $P_N(x)$ *e não* $f(x)$. *Faltou controlar o resto!*

6.4 Integral de Riemann generalizada

A definição de integral de Riemann é muito restritiva. Há funções importante que não são integráveis. Considere por exemplo a função de Dirichlet, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se x racional;} \\ 0, & \text{se x irracional.} \end{cases}$

Essa função é nula num conjunto muito mais amplo de pontos do que os pontos em que ela vale 1. Seria de se esperar que a integral dela num intervalo qualquer fosse bem definida e desse sempre zero. Mas a integral de Riemann não existe. Em qq intervalo I_i, $m_i = 0$ e $M_i = 1$, e as somas superior e inferior divergem entre si. A raiz do problema está em que a soma de Riemann exige o limite uniforme na norma de cada subintervalo e na escolha dos pontos dos intervalos para avaliar a função.

Uma definição alternativa do limite seria permitir extensões máximas distintas dos subintervalos: em vez de, para dado ϵ tomar um único δ_ϵ para exigir $|P| < \delta_\epsilon$, se pode indagar a existência de uma função, $\delta_\epsilon(x) > 0$, chamada de escolha de gauge, a ser utilizada na definição da soma. Para isso é preciso usar uma partição segregada e o ponto t_i escolhido em cada subintervalo determina $\delta_i \doteq \delta_\epsilon(t_i)$ a ser imposto ao I_i, $I_i \subset [t_i - \delta_i, t_i + \delta_i]$ ou, se pode mostrar a equivalência com a exigência de que $|I_i| \leq \delta_i$.

A integral de Riemann generalizada se define então pela exigência de que, dada uma função e um intervalo compacto I, exista o número S tal que,

$\forall \epsilon, \exists \delta_\epsilon(x) > 0 | \forall s P[I], |I_i| < \delta_\epsilon(t_i) \rightarrow |S - \sum f(t_i)|I_i|| < \epsilon.$

A dependência em x da δ, isto é a função de gauge, permite uma flexibilidade muito grande. A sua definição pode, inclusive, ser feita de maneira a que se imponha a escolha de alguns pontos t_i específicos. Isso permite controlar os pontos onde há descontinuidade da função. Essa é a chamada soma de Riemann generalizada, ou integral de Henstock-Kurzweil. Aplicada à função de Dirichlet, em um intervalo finito por exemplo, a técnica permite cercar os pontos em que $f = 1$ com intervalos infinitesimais cuja soma das extensões é tão pequena quanto se queira, resultando em que somente os valores da função nos irracionais, f=0, contribuem efetivamente para o cálculo da integral. Resulta que a integral é zero.

Essa definição de integral não está ainda difundida em livros de cálculo, nem na comunidade de físicos, mas me parece bem promissora. Toda função integrável à Riemann é integrável a Riemann generalizada. Vários teoremas básicos das integrais como aditividade, e univocidade continuam valendo. Também, um controle mais minucioso do teorema fundamental do cálculo é conseguido.

Em física, a integração padrão é a integral de Lebesgue. Sua definição é um tanto trabalhosa, se a queremos em sua generalidade. Ela é a base para definir o espaço de Hilbert das funções de onda em mecânica quântica. Essa integral é baseada na noção de medida de um conjunto e um especial papel é atribuído aos conjuntos de medida nula. Um conjunto de medida nula tem uma 'extensão total' nula. Todo conjunto enumerável tem medida nula, mas nem todo conjunto de medida nula é enumerável. A beleza e utilidade da integral de Lebesgue repousa na sua independência dos valores da função em conjuntos de medida nula. A integral de Riemann generalizada dá conta de resultar nula ao ser integrada sobre uma função que é diferente de zero somente em pontos de um conjunto de medida nula. Se pode mostrar inclusive que a integral de Lebesgue nos reais está contida na noção de integral de Henstock-Kurzweil, mas que essa é um pouco mais geral, permitindo somar funções de módulo não integrável, o que a integral de Lebesgue não consegue.

Discussão sobre teorema fundamental.

Em Riemann usual vale **Segundo teorema**: Se f tem primitiva G e é integrável no intervalo compacto I então

$\int_a^b f = \Delta G$. Obs: também se pode requerer que f seja contínua, e daí decorre integrabilidade, e tenha primitiva.

Nova versão do **Segundo teorema** com Riemann generalizado: Se f tem primitiva G então f é *-integrável e $\int_a^b f = \Delta G$. Ou ainda se f tem c-primitiva (primitiva exceto por conjunto enumerável) G_c então f é *-integrável e $\int_a^b f = \Delta G_c$. Ou ainda se f tem a-primitiva (exceto por conjunto de medida nula) G_a e se f é *-integrável então $\int_a^b f = \Delta G_a$.

Em Riemann usual vale **Primeiro teorema**: Se f é integrável no intervalo compacto $I = [a, b]$ define-se $F(x) = \int_a^x f(x)dx$. Então
1) $F(x)$ é contínua em I
2) F é primitiva de f, nos pontos de continuidade de f.
Primeiro teorema para Rieman generalizado: Se f é *-integrável no intervalo compacto $I = [a, b]$ define-se $F(x) = \int_a^x f(x)dx$. Então
1) $F(x)$ é contínua em I
2) F é primitiva de f, nos pontos $x \in I - Z$ onde Z é um conjunto de medida nula, (F é uma a-primitiva).
3) Se existe o limite (parcial) de $\lim_{x \longrightarrow x_0^{\pm}} f(x) = A$ então a derivada (à direita\ esquerda) de F no ponto x_0 é A.

6.5 Integral de Riemann-Stieltjes

Às vezes é conveniente tratar a soma contínua (a integral) e a soma discreta (como tipo em séries) sob o mesmo formalismo. Isso pode ser incorporado como nova definição de integral. A base é considerar uma função crescente em $[a, b]$, $\alpha(x)$, e descontínua de primeira espécie no máximo em um conjunto enumerável de pontos, assim $\alpha(x) \geq \alpha(y)$ se $x > y$. A soma superior e inferior, à Darboux, é modificada trocando-se a definição de norma dos subintervalos: $|I_i| \equiv \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$. A notação passa a ser $\int f d\alpha$.

Por exemplo, tomemos $\alpha(x) = \Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$. Ao realizar a soma de Riemann-Stieltjes somente o intervalo que contém $x = 0$ contribui. Resulta $\int f d\alpha = f(0)$, desde que $x = 0$ esteja no intervalo de integração.

Outro exemplo $\alpha(x) \doteq \sum \alpha_i \Theta(x - x_i) + cx$. Resulta
$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sum_{i|a<x_i<b} \alpha_i f(x_i) + c\int_a^b f(x)dx$.

Teorema: Se $\alpha'(x)$ existe e é integrável, assim como $f(x)$ é integrável, então $\int f d\alpha = \int f(x)\alpha'(x)dx$.

6.6 Exercícios

1) Discutir $\int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x} dx$. Existe limite?

a) Fazer $x = \frac{1}{y}$ e trocar por $\int_1^\infty \frac{\cos(y)}{y} dy$.

b) Integrar por partes e observar q $\int_1^R \frac{\cos x}{x} dx = \frac{\sin x}{x} \backslash_1^R + \int_1^R \frac{\sin x}{x^2} dx$. Encontrar limite para a integral remanescente. c) Mostrar que por um argumento tipo sequência de Cauchy se pode assegurar a existência do limite.

d) Mostre que esse é um exemplo em que a integral do módulo diverge.

2) 6.3 e 6.4; 6.7 e 6.11 6.14

3) Considere a seguinte função: $f(x) = \sum_{n|[(1-2^{-n})<x]} \frac{2^n}{n!}$. Esboce um gráfico dessa função. Discuta sobre a função $\int^x g(x)df$, onde $g(x)$ é, digamos a) g(x)=1; b) g(x)=x.

Capítulo 7

Séries de Funções

7.1 Sequências

Notação $f_n(x)$. Há diferentes tipos de convergência- conforme a estrutura que seja definida no espaço de funções. Agora tratamos de convergência pontual: $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, se $\forall x \in X, \exists f(x) | \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = f(x)$.
Ou $(\forall\epsilon > 0, x \in X)(\exists N \in \mathcal{N})(n > N \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$. Note que, implicitamente, $N = N(\epsilon, x)$.

Convergência e Integrabilidade, Continuidade e Diferenciabilidade.
Contra-exemplos

I- Continuidade: $X = [0,1], f_n(x) = x^n$. $f_n(x)_{n\longrightarrow\infty} \longrightarrow \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1, x = 1 \end{cases} \rightarrow$ f não contínuo.

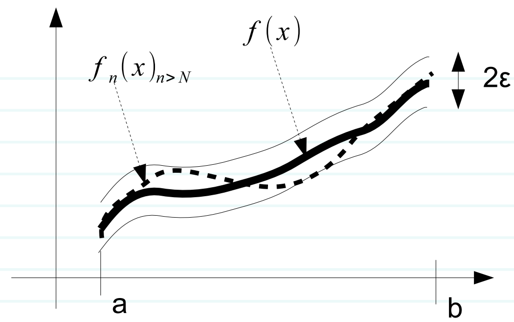
II- Diferenciabilidade: $X = (-1,1), f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}{}_{n\longrightarrow\infty} \longrightarrow 0 = f(x)$

$f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}{}_{n\longrightarrow\infty} \longrightarrow \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases} \neq f'(x)$

III- Integrabilidade: $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x, \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n} \\ 0, \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \longrightarrow 0 = f(x)$

$\int_0^1 f_n(x) = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$. Alternativa para domínio na reta toda: $f(x) = 1 - |x - n|$, para $n - 1 \leq x \leq n + 1$, e nula fora desse intervalo. Obs: Relação com convergência na norma.

Critérios suficientes:
Convergência uniforme $(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathcal{N})(\forall x \in X)(n > N \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$. Notação minha $f_n(x) \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} f(x)$.



Conv. Uniforme

Descrição alternativa: $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{N}, n > N \to \mathrm{Sup}_X(\{|f(x) - f_n(x)|\}) < \epsilon$. Onde $\mathrm{Sup}_X(\{|f(x) - f_n(x)|\})$ é o supremo nos valores de $x \in X$ de $|f(x) - f_n(x)|$. Assim, é preciso que não haja nenhum valor de $f_n(x)$ que viole a desigualdade em ϵ, quando $n > N$.

I- Integrabilidade. ($f_n(x)$ integráveis em [a,b], $f_n(x) \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} f(x)$) $\to$ (f integrável, $\int \lim f_n = \lim \int f_n$).
Demo: 1) Para $n > N$ se pode conseguir $\forall x \in [a,b]$, $f_n(x) - \epsilon_1 < f(x) < f_n(x) + \epsilon_1$ e daí $\overline{S}(P,f) < \overline{S}(P,f_n) + \epsilon_1|b-a|$ e $\underline{S}(P,f) > \underline{S}(P,f_n) - \epsilon_1|b-a|$. Assim, tomando $|b-a|\epsilon_1 = \epsilon_1'$, $\overline{S}(P,f) - \underline{S}(P,f) < 2\epsilon_1' + \underbrace{(\overline{S}(P,f_n) - \underline{S}(P,f_n))}_{<\epsilon_2} < \epsilon \equiv 2\epsilon_1' + \epsilon_2$.

2) Usando q f é integrável, $|\int f_n - \int f| = |\int (f_n - f)| \leq \int |f_n - f| < \int \frac{\epsilon_1}{|b-a|} = \epsilon$.

Importante: intervalo limitado é essencial! Veja $f_n(x) \doteq \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}} \overset{\text{unif}}{\longrightarrow} 0$ (tomar $N > \frac{1}{\epsilon}$), mas $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^\infty f_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} 1 = 1 \neq \int \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n = 0$

II- **Continuidade.** $f_n(x)$ **contínuas** $[a,b]$ **(então são unif contínuas) e conv uniforme** $\to$ **f contínua** $[a,b]$
Demo: Supondo $n, m > N$ na continuidade das funções f_n, $|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_m(y) + f_m(y) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)| < \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1 \doteq \epsilon$.

III- Derivada. Não basta converg unif da sequência, mas é suficiente convergência unif da seq de derivadas: a) $f_n(x)$ diferenciáveis em [a,b]; b) $f_n'(x)$ unif convergente em [a,b]; c) $f_n(x_0)$ convergente em algum $x_0 \in [a,b]$ então 1) $f_n(x)$ unif convergente para f; 2) f diferenciável ; 3) $f' = \lim f_n'$.
Demo: Usar convergência das derivadas e trocar limite e integral delas.

7.2 Séries de funções

Herdam as noções de convergência e convergência uniforme das sequências de somas parciais. Herdam propriedades de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade análogo a sequências.

Testes de convergência pontual: podem ser generalizados para conv uniforme desde que critérios sejam independentes de x.

Teste M de Wieerstrass:

Sejam $f_n(x)$ dominadas em módulo por série numérica $\forall x \in X, |f_n(x)| \leq M_n$. Então $\sum M_n$ convergente $\to f_n$ uniformemente convergente.

Demo $f_n(x)$ *converge pontualmente por comparação.* $|f(x) - \sum_1^N f_n(x)| = |\sum_{N+1}^\infty f_n(x)| \le \sum_{N+1}^\infty |f_n(x)| \le \sum_{N+1} M_n$*, que independe de* x *e vai a zero qdo* N *vai a infinito.*

Exemplos 1) $\sum e^{inx} n^s$, $s > 1$. *2)* $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$*, Unif conv para* $\Re x > 1 + \delta$, $\delta > 0$. *De fato* $|\frac{1}{n^s}| = \frac{1}{n^{\Re s}}| \le \frac{1}{n^{1+\delta}}$ *Obs: Não unif converg quando* $s \longrightarrow 1$.

7.3 Séries de potências

$f(x) = \sum a_n x^n$**, eventualmente** $x = y - y_0$**.**

Teorema: Se f converge para $x = x_0$ então 1) converge uniformemente e absolutamente para $|x| < |x_0|$; 2) f é diferenciável nessa região e a série derivada para $f' = \sum x a_n x^{n-1}$ converge.

Corolário: Todas derivadas existem e são diferenciáveis.$\rightarrow$ função analítica.

Demo: $|a_n x_0^n| \le M$. *Daí se* $|x| \le c < |x_0|$, $|a_n x^n| = |a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}| \le M \frac{c^n}{|x_0^n|} = M r^n$, $r < 1$. *Mas* $M r^n$ *converge. Para derivadas* $|a_n n x^{n-1}| \le \frac{M}{|x_0|} n r^{n-1}$ *que converge pelo teste da razão.*

Lema de Abel: Se para algum $x_0 \neq 0$, $\forall n, |a_n x_0^n| \le M$ então a série é a) Absolutmnt converg pra $|x| < |x_0|$; b) Unif converg para $|x| \le r < |x_0|$.

Raio de convergência: $R = \sup\{r | \exists M_r, \forall n, |a_n r^n| < M_r\}$. Significa: $\sum a_n x^n$ unif conv para $|x| \le r < R$.

Exemplos: 1) $R(x^n) = 1$; *2)* $R(\frac{x^n}{n}) = 1$; $R(\frac{x^n}{n^2}) = 1$.

Teorema de Cauchy-Hadamard: Se $\rho = \limsup_{n \longrightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ então $R = \frac{1}{\rho}$

Demo: Considere $\rho' < \rho < \rho''$*, de modo que* $(\rho' r)^n < (\rho r)^n < (\rho'' r)^n$. *Se n sufic grand temos* $(\rho' r)^n < |a_n| r^n < (\rho'' r)^n$. *Se* $r = \frac{1}{\rho''}$ $(r = \frac{1}{\rho'})$*, então* $|a_n| r^n \le 1$ *.....*

7.4 Expansão Assintótica

Convergência X Rapidez na convergência

Qtos termos necessários para alcançar representação da função com precisão requerida?—> Velocidade da convergência maior se menos termos.

Contraexemplo: $\ln(N+1) - \sum^N \frac{1}{n}$.

Importante: Alcançar boa aproximação com poucos termos pode prescindir de convergência.

Ex: Integral exponencial $E_1(x) \doteq \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$, $x > 0$. Integrando por partes n vezes se obtém

$$E_1(x) = \underbrace{\frac{e^{-x}}{x} [\sum_0^n (-1)^k \frac{k!}{x^k}]}_{S_n(x)} + \underbrace{(-1)^{n+1} (n+1)! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+2}}}_{R_{n+1}(x)}$$

Mas $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} < \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{x^{n+2}} = \frac{e^{-x}}{x^{n+2}}$ e assim $|R_{n+1}(x)| \le (n+1)! \frac{e^{-x}}{x^{n+2}}{}_{x \longrightarrow \infty} \longrightarrow 0$. A série obtida ignorando o resto, não é convergente para nenhum valor de x! No entanto a série truncada representa bem a função para valores grande de x. Note ainda que os termos da série de S_n tem razões entre termos sucessivos indo a zero para x indo a infinito.

Formalização: Expansão assintótica. Notação Bachmann-Landau.

1) Da mesma ordem, 'O' maiúsculo: $f(x) = O[\phi(x)]_{x \longrightarrow \infty} \leftrightarrow |f(x)| \le A |\phi(x)|_{x \longrightarrow \infty}$. f dominada por ϕ.

Ex: $\sin(x) = O[x]$; $5x^2 = O(x^2)$; $3x + \sin(x) = O(x)$; $5x^2 = O(x^2)_{x \longrightarrow 0} = O(x)_{x \longrightarrow 0}$.
Obs: O(1)= Limitada em módulo.

2) De ordem inferior, 'o' minúsculo. Razão vai a zero. $f(x) = o(x) \leftrightarrow \frac{|f(x)|}{x} \longrightarrow 0$. Obs: o(1)$\equiv$ vai a zero.

3) Expansão assintótica: $f(x) = \sum^N c_n \phi_n(x) + R_{N+1}(x)$, com $\phi_{n+1} = o(\phi_n)$ e $R_{n+1} = O(\phi_{n+1})$

Propriedades: Teorema: Dado um conjunto de funções, ϕ_n, a expansão assintótica de $f(x)$, se houver, é unívoca. *Demo: iterativa. Escrever dupla série e obter* $0 = f(x) - f(x) = \sum^n (c_k - c'_c)\phi_k(x) + O[\phi_{k+1}(x)]$ *Mas se* $c_0 \neq c'_0$, *multiplicar série por* ϕ_0^{-1} *e tomar o limite para obter* $c_0 - c' = 0$.

Exemplo: Logaritmo em série de potências negativas de x. $\ln(1+x) = \ln(x(1+\frac{1}{x})) = \ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x}) = \ln(x) + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{kx^k} + R_N(x)$. Como erro cometido em série convergente alternada é menor que primeiro termo desprezado, $|R_n(x)| = O(\frac{1}{x^{n+1}})$.

Teorema: Toda série de potências com raio finito define série assintótica, para $x \longrightarrow 0$.
Demo para $r < R$ *convergência* $\rightarrow |a_n r^n| \leq M$. *Daí o resto de ordem n será, para o caso de* $|z| < \frac{r}{2}$, $|R_n(x)| = |\sum_{n+1}^{\infty} a_j z^j| = |\sum_{n+1}^{\infty} a_j r^j \frac{z^j}{r^j}| \leq M|\frac{z}{r}|^{n+1} \sum 2^{-k} = A|z|^{n+1}$. *Assim* $R_n = O[z^{n+1}]$. *Enquanto* $\frac{z^{n+1}}{z^n} \longrightarrow 0$.

Operações com expansões assintóticas: Podem ser tratadas como polinômios: Somadas, multiplicadas, divididas ou mesmo compostas $f(g(x))$.
Integração: se $\int_0^x f(t)dt$ existe, então se pode integrar termo a termo expansão assintótica de f.
Derivação: Se f apresenta expansão e f' também, então se pode derivar termo a termo.

Exs:

1) $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} \frac{2t}{2t} dt$. Daí

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - erf(x)) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{-x^2}(-1)^k}{2^k x^{2k+1}(2k-3)!!} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{2^n x^{2n+1}(2n-1)!!} dt$

2) $Ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$. Obtenha a expansão assintótica

para $\int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin(x)}{x} + \int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t^2} dt$.. etc

7.5 Exercícios

Livro Nivaldo:

7.1- Trivial, com identidade trigonométrica.

7.2 Lembre-se que para $0 < x < 1$, x^n vai a zero mais rapidamente do que n cresce. A $f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x)$ é contínua? O que acontece com o $\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(\frac{1}{n^2})$? Tendo em vista o $\lim_{n \longrightarrow \infty} g_n(\frac{1}{n})$, é verdade que $\text{Sup}_{[0,1]}(\{|g_n(x)|\})$ vai a zero? Obs:$\lim(1 - \frac{1}{n})^n = \lim(\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n}) = \frac{1}{e}$, ou não é? Observe que no caso de $g_n(x)$, o limite é contínuo. Isso **requer** convergência uniforme?

Lembre-se da descrição alternativa de convergência uniforme: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathcal{N}, n > N \rightarrow \text{Sup}_X(\{|f(x) - f_n(x)|\}) < \epsilon$. Onde $\text{Sup}_X(\{|f(x) - f_n(x)|\})$ é o supremo nos valores de $x \in X$ de $|f(x) - f_n(x)|$. Assim, é preciso que não haja nenhum valor de $f_n(x)$ que viole a desigualdade em ϵ, quando $n > N$.

7.5) Apele para o teste M de Weierstras.

7.7) Que acontece com $f_n(n)$? Explore $e^{\frac{x}{n}} = (e^{\frac{a}{n}})^{\frac{x}{a}}$, ou localize os máximos e mínimos para analisar a convergência uniforme em $[-a, a]$.

7.11) Separe $x \in \mathcal{Z}$ dos não inteiros. O limite é contínuo? Vc também pode analisar qdo x se aproxima de um inteiro, por exemplo $x_n = \frac{c}{\pi\sqrt{n}}$.

7.13) Analise $f_n(\frac{c}{n})$. Verifique que mesmo assim se pode trocar limite por integral! Como muda a análise da uniformidade para f_n se o intervalo for [a,1), com $0 < a < 1$? Quanto a g, reescreva $g_n = \frac{1}{\frac{1}{x}+n}$. Em que isso ajuda?

7.16) Separe os termos positivos dos negativos e some-os, até $n = N$, separadamente. Veja que cada soma é dominada pela soma de $\pm|a_n|$ e analise se cada soma separada é convergente.